

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Fisica

# DINAMICA ED EQUAZIONI DEL MOTO DI STRINGHE CLASSICHE RELATIVISTICHE

Relatore:  
Prof. Fiorenzo Bastianelli

Presentata da:  
Michael Bacchi

Anno Accademico 2018/2019

# Introduzione

La teoria delle stringhe è una complessa struttura teorica sviluppatasi a partire dalla fine degli anni 60' e tutt'oggi in fase di studio e analisi. Nata per spiegare l'interazione forte, ci si rese conto solo successivamente che può essere non solo un buon candidato per una teoria quantistica della gravità, ma potrebbe anche spiegare ed unificare le quattro interazioni fondamentali: elettromagnetica, interazione debole, interazione forte e gravitazione. Infatti ad ogni modo normale di oscillazione delle stringhe è associata una particella del Modello Standard, e ad una particolare vibrazione è legato il gravitone, un bosone di spin 2 e massa nulla considerato il quanto dell'interazione gravitazionale.

Oltre agli interessi legati alla gravitazione e alla fisica delle particelle, la teoria delle stringhe ha applicazioni in cosmologia e nello studio dei buchi neri, nelle teorie di gauge, nel campo della fisica nucleare e della materia condensata.

All'interno della teoria delle stringhe si possono realizzare due divisioni. La prima è tra stringhe aperte e stringhe chiuse. La seconda separa la teoria delle stringhe bosoniche dalle 5 teorie delle super-stringhe sviluppatesi nel corso degli anni. Queste ultime si è poi dimostrato essere tutte sfaccettature di un'unica teoria più generale, tuttavia non ancora individuata. In aggiunta, la mancanza di alcun tipo di riscontro dalle verifiche sperimentali ha fatto sì che, nonostante le sue potenzialità e il lavoro di molti teorici nel corso degli anni, al giorno d'oggi molti scienziati siano diventati scettici sulla validità di questa teoria.

La teoria delle stringhe è, nella sua formulazione più semplice, una teoria quantistica di stringhe classiche relativistiche. In questa tesi in particolare esamineremo il comportamento e le proprietà fisiche e dinamiche delle stringhe classiche relativistiche aperte, ricavandone infine le relative equazioni del moto.

Per fare questo, introdurremo inizialmente le nozioni di relatività ristretta e di meccanica lagrangiana indispensabili per la successiva trattazione delle stringhe. Nei capitoli 2 e 3 esamineremo rispettivamente la dinamica della stringa non relativistica e della particella relativistica. In particolare ci soffermeremo sullo studio delle condizioni al contorno e sul concetto di invarianza per riparametrizzazione. Il capitolo 4 è dedicato alla deduzione e all'analisi dell'azione di Nambu-Goto e dell'equazione del moto della stringa relativistica. Si sceglierà una parziale parametrizzazione della superficie di universo tracciata dalla stringa nello spazio-tempo e verrà studiato in dettaglio il moto degli estremi liberi della

stringa. Nel capitolo 5 verrà fornita una parametrizzazione totale, portando alla versione definitiva delle equazioni del moto con i relativi vincoli. Di queste equazioni sarà dedotta la soluzione più generale, così da determinare completamente la dinamica della stringa relativistica. Infine nel capitolo 6 si studieranno le simmetrie legate alla densità di lagrangiana e all'invarianza per trasformazioni di Lorentz dell'azione, e le corrispondenti correnti e cariche conservate dal moto della stringa.

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>i</b>
<b>1 Relatività ristretta e meccanica lagrangiana</b>	<b>1</b>
1.1 Relatività ristretta . . . . .	1
1.1.1 Principio di relatività di Einstein . . . . .	1
1.1.2 Intervalli e metrica di Minkowski . . . . .	2
1.1.3 Trasformazioni di Lorentz . . . . .	3
1.1.4 Energia e momento relativistici . . . . .	4
1.2 Meccanica lagrangiana . . . . .	5
1.2.1 Principio di minima azione . . . . .	5
1.2.2 Simmetrie e quantità conservate . . . . .	6
<b>2 Stringhe non relativistiche</b>	<b>8</b>
2.1 Equazione d'onda e condizioni al contorno . . . . .	8
2.2 Azione per stringhe non relativistiche . . . . .	10
<b>3 Il punto materiale relativistico</b>	<b>14</b>
3.1 Azione di una particella relativistica . . . . .	14
3.2 Invarianza per riparametrizzazione . . . . .	15
3.3 Equazioni del moto . . . . .	16
<b>4 Stringhe relativistiche</b>	<b>18</b>
4.1 Funzionale d'area e invarianza per riparametrizzazione . . . . .	18
4.2 Azione di Nambu-Goto . . . . .	23
4.3 Equazioni del moto, condizioni al contorno e D-Brane . . . . .	24
4.4 Gauge statico ed esempio di una stringa stirata . . . . .	26
4.5 Velocità trasversale e moto degli estremi . . . . .	28
<b>5 Parametrizzazione totale e moto classico</b>	<b>32</b>
5.1 Parametrizzazione di $\sigma$ ed equazioni del moto . . . . .	32
5.2 Equazione d'onda e vincoli associati . . . . .	34

<i>INDICE</i>	iv
5.3 Soluzione dell'equazione del moto . . . . .	37
<b>6 Correnti lungo la superficie di universo</b>	<b>39</b>
6.1 Correnti conservate e loro interpretazione . . . . .	39
6.2 Simmetria di Lorentz e correnti associate . . . . .	42
<b>Appendice A: Calcolo della variazione dell'azione <math>\delta S</math></b>	<b>45</b>
<b>Appendice B: Conservazione della carica per lagrangiane invarianti</b>	<b>47</b>
<b>Appendice C: Verifica della corretta formulazione dell'area propria <math>A</math></b>	<b>48</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>49</b>

# Capitolo 1

## Relatività ristretta e meccanica lagrangiana

In questo primo capitolo si vogliono illustrare i principali risultati legati alla teoria della relatività ristretta e alla meccanica lagrangiana.

A tal fine, nella prima parte verranno trattati i due principi di relatività di Einstein, la metrica di Minkowski, le trasformazioni di Lorentz e le definizioni di energia e momento relativistici. Questi argomenti verranno fin da subito presentati utilizzando il formalismo tensoriale.

Nella seconda parte invece saranno ripresi il principio variazionale di minima azione e la teoria delle simmetrie legate alla lagrangiana.

Chiaramente verrà svolta una trattazione sintetica, volta a presentare solo i risultati indispensabili per una successiva trattazione della teoria delle stringhe, relativistiche e non.

### 1.1 Relatività ristretta

#### 1.1.1 Principio di relatività di Einstein

La teoria della relatività ristretta nasce dalla necessità di eliminare l'incompatibilità tra la teoria elettromagnetica di Maxwell e la meccanica newtoniana, modificando le leggi di trasformazione del moto tra due sistemi di riferimento. L'elettrodinamica classica infatti non è invariante per trasformazioni galileiane, e perciò viola il principio di relatività, secondo il quale le leggi della natura sono identiche in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

Per sanare questa contraddizione, Einstein assunse i seguenti postulati:

1. Postulato di relatività: le leggi della fisica sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali.
2. Postulato della costanza della velocità della luce: la velocità della luce nel vuoto è la stessa (in modulo) in tutti i sistemi di riferimento inerziali, e vale

$$c = 299792458 m/s.$$

A partire da questi principi è possibile dedurre le trasformazioni di Lorentz, secondo le quali le equazioni di Maxwell risultano ora essere invarianti. Queste trasformazioni mescolano le tre coordinate spaziali e la coordinata temporale, portando a conseguenze sorprendenti, legate, per esempio, alla perdita del concetto di simultaneità o alla dilatazione dei tempi e alla contrazione delle lunghezze. Devono d'altra parte ridursi alle usuali trasformazioni di Galileo nel limite di basse velocità  $v \ll c$ .

### 1.1.2 Intervalli e metrica di Minkowski

In relatività ristretta <sup>1</sup> ogni evento è contraddistinto da tre coordinate spaziali e da una coordinata temporale. Queste si possono raggruppare utilizzando la seguente notazione:

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z), \quad (1.1)$$

dove  $\mu$  può assumere i valori 0,1,2 e 3.

Si considerino ora due sistemi di riferimento inerziali,  $S$  e  $S'$ , e due eventi. In  $S$  questi saranno rappresentati dalle coordinate  $x^\mu$  e  $x^\mu + \Delta x^\mu$ ; per il secondo osservatore invece i due eventi saranno descritti da  $x^{\mu'}$  e  $x^{\mu'} + \Delta x^{\mu'}$ . In generale saranno diversi sia  $x^\mu$  e  $x^{\mu'}$  che  $x^\mu + \Delta x^\mu$  e  $x^{\mu'} + \Delta x^{\mu'}$ . I due osservatori però saranno d'accordo sul valore dell'intervallo invariante  $\Delta s^2$  definito come segue:

$$-\Delta s^2 \equiv -(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2. \quad (1.2)$$

Questo vuol dire che

$$\Delta s^2 = \Delta s'^2. \quad (1.3)$$

A seconda del segno di  $\Delta s^2$  si distingue in intervalli di tipo-tempo, se  $\Delta s^2 > 0$ , intervalli di tipo-luce nel caso in cui  $\Delta s^2 = 0$  e in intervalli di tipo-spazio se  $\Delta s^2 < 0$ .

È possibile ottenere una definizione analoga alla (1.2) anche per eventi le cui coordinate differiscano per quantità infinitesime. In questo caso tali differenze infinitesime si indicano  $dx^\mu$ , mentre l'intervallo invariante, detto anche distanza minkowskiana, sarà

$$-ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2. \quad (1.4)$$

---

<sup>1</sup>Per una trattazione più esaustiva dei fondamenti e delle implicazioni della relatività ristretta, si rimanda a [1] e [2].

La definizione (1.4) può essere semplificata introducendo la metrica di Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$ , un tensore di rango 2, simmetrico per scambio degli indici e tale che

$$-ds^2 = \sum_{\mu=0}^3 dx_\mu dx^\mu = dx_\mu dx^\mu = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (1.5)$$

La quantità  $dx_\mu$  può essere ottenuta utilizzando la metrica  $\eta_{\mu\nu}$  per abbassare un indice:

$$dx_\mu = \eta_{\mu\nu} dx^\nu. \quad (1.6)$$

D'ora in avanti utilizzeremo sempre la notazione di Einstein, che prevede la somma sugli indici ripetuti, se non diversamente specificato. Dalla proprietà di simmetria e da (1.5) è possibile scrivere  $\eta_{\mu\nu}$  in forma matriciale come segue:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Spesso è conveniente introdurre anche la matrice inversa di  $\eta_{\mu\nu}$ , ovvero la matrice  $\eta^{\mu\nu}$ , data da

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e tale che

$$\eta^{\nu\rho} \eta_{\rho\mu} = \delta_\mu^\nu, \quad (1.7)$$

dove  $\delta_\mu^\nu$  è la delta di Kronecker.

### 1.1.3 Trasformazioni di Lorentz

Le trasformazioni di Lorentz sono le corrette relazioni che legano le coordinate di un evento visto in due diversi sistemi di riferimento inerziali. In particolare sono relazioni lineari ed invertibili che rispettano la relazione

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = (x'^0)^2 - (x'^1)^2 - (x'^2)^2 - (x'^3)^2, \quad (1.8)$$

la quale discende direttamente dall'invarianza della distanza minkowskiana  $\Delta s^2$ .

Immaginiamo ora che gli assi coordinati dei due sistemi  $S$  e  $S'$  siano paralleli e che la loro origine coincida per  $t = t'$ . Se  $S'$  ha una velocità in direzione  $x$  rispetto a  $S$  con un



parametro di velocità pari a  $\beta = v/c$ , allora la trasformazione che permette di ottenere le coordinate di  $S'$  in funzione di quelle di  $S$  è:

$$\begin{cases} x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1) \\ x'^1 = \gamma(-\beta x^0 + x^1) \\ x'^2 = x^2 \\ x'^3 = x^3 \end{cases}$$

dove  $\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$  è il fattore relativistico o fattore di Lorentz. La stessa trasformazione può essere espressa più sinteticamente in forma matriciale, scrivendo

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \quad (1.9)$$

dove si ha che

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'equazione (1.8) impone delle condizioni sugli elementi di matrice di  $\Lambda^\mu{}_\nu$  e più in generale sulla famiglia delle trasformazioni di Lorentz. Infatti deve essere soddisfatta la condizione

$$\Lambda_\alpha{}^\mu \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\beta = \eta_{\alpha\beta}. \quad (1.10)$$

L'invertibilità della trasformazione discende invece dal valore del determinante di  $\Lambda^\mu{}_\nu$ , che risulta essere sempre diverso da zero. Dalla (1.10) riscritta in forma matriciale si ricava infatti

$$(\det \Lambda^T)(\det \eta)(\det \Lambda) = \det \eta \rightarrow (\det \Lambda)^2 = 1 \rightarrow \det \Lambda = \pm 1. \quad (1.11)$$

### 1.1.4 Energia e momento relativistici

In relatività ristretta l'energia e il momento relativistici sono definiti dalle seguenti espressioni in funzione della massa a riposo  $m$  e della velocità  $\vec{v}$ :

$$E = \gamma mc^2 \quad \vec{p} = \gamma m \vec{v} \quad (1.12)$$

e soddisfano la relazione

$$\frac{E^2}{c^2} - \vec{p} \cdot \vec{p} = m^2 c^2. \quad (1.13)$$

Queste due grandezze possono essere racchiuse a formare un quadri-vettore, il quadri-vettore momento

$$p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3) = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z\right) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) = m\gamma(c, \vec{v}). \quad (1.14)$$

Oltre a trasformarsi come  $x^\mu$  sotto l'azione della matrice di Lorentz  $\Lambda_\nu^\mu$ , il quadri-vettore momento è importante perché permette di ottenere un secondo invariante relativistico. Infatti utilizzando la metrica di Minkowski per abbassare l'indice di  $p^\mu$ , si ricava

$$p^\mu p_\mu = -m^2 c^2 \quad (1.15)$$

che è chiaramente uno scalare in quanto la massa a riposo è la stessa per tutti gli osservatori.

Per particelle massive è possibile definire anche il tempo proprio  $t_p$ , ovvero il tempo misurato nel sistema di riferimento solidale alla particella che si sta osservando. Poiché in questo sistema di riferimento la particella è a riposo, il calcolo dell'invariante relativistico  $\Delta s^2$ , per intervalli tipo tempo, si semplifica in

$$-\Delta s^2 = -c^2 dt_p^2 \rightarrow ds = c dt_p, \quad (1.16)$$

permettendo di ottenere così un'espressione per il tempo proprio

$$dt_p = \frac{ds}{c}. \quad (1.17)$$

## 1.2 Meccanica lagrangiana

La lagrangiana di un sistema è definita come

$$L(x, \dot{x}) = T - V, \quad (1.18)$$

dove  $T$  è l'energia cinetica del sistema e  $V$  è la sua energia potenziale. Dalla lagrangiana è possibile ricavare l'azione

$$S = \int_P L(t) dt, \quad (1.19)$$

dove  $P$  è una traiettoria  $x(t)$  tra la posizione iniziale  $x_i$  al tempo  $t_i$  e la posizione finale  $x_f$  al tempo finale  $t_f$ . Per questo, l'azione è un funzionale che agisce sullo spazio delle configurazioni del sistema, prendendo in input la funzione  $x(t)$  e restituendo un numero.

### 1.2.1 Principio di minima azione

Il principio di Hamilton, o principio di minima azione <sup>2</sup>, afferma che la traiettoria  $P$  che il sistema percorrerà, è quella per la quale la relativa azione è stazionaria. Grazie a questo risultato, è possibile determinare le equazioni del moto di qualunque sistema fisico calcolando dapprima la variazione dell'azione  $\delta S$ , fino al primo ordine, dovuta ad una perturbazione del cammino (v. fig. 1.1) da  $x(t)$  a  $x(t) + \delta x(t)$  tale che

$$\delta x(t_i) = \delta x(t_f) = 0, \quad (1.20)$$

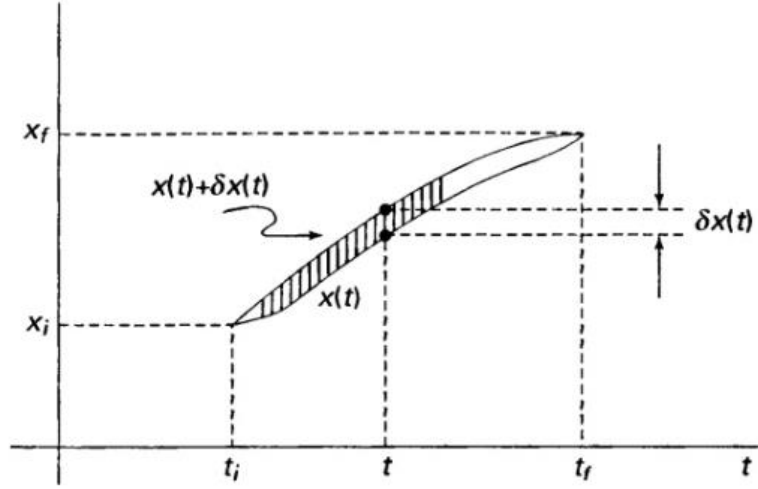


Figura 1.1: percorso  $x(t)$  e sua variazione  $x(t) + \delta x(t)$ . La variazione si annulla per  $t = t_i$  e  $t = t_f$

e ponendo poi tale variazione uguale a zero.

Per esempio, considerando un punto materiale che si muove lungo l'asse  $x$ , e procedendo come indicato in Appendice A, si trova che la variazione dell'azione è

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} \delta x(t) (-m\ddot{x}(t) - V'(x(t))) dt, \quad (1.21)$$

da cui si ricava la seconda equazione di Newton della dinamica

$$m\ddot{x}(t) = -V'(x(t)). \quad (1.22)$$

### 1.2.2 Simmetrie e quantità conservate

La lagrangiana può essere anche utilizzata per dedurre l'esistenza di quantità, o cariche, conservate.

Data la lagrangiana  $L(q(t), \dot{q}(t), t)$  si consideri una variazione delle coordinate

$$q(t) \rightarrow q(t) + \delta q(t), \quad (1.23)$$

dove

$$\delta q(t) = \epsilon h(q(t), t), \quad (1.24)$$

---

<sup>2</sup>Per maggiori dettagli si veda [3].

con  $\epsilon$  costante infinitesima e  $h(q(t), t)$  funzione arbitraria. Questa perturbazione si rifletterà sulle velocità  $\dot{q}(t)$  che cambieranno in

$$\dot{q}(t) \rightarrow \dot{q}(t) + \frac{d(\delta q(t))}{dt}. \quad (1.25)$$

Se le variazioni lineari in  $\delta q$  indotte nella lagrangiana si annullano, allora la lagrangiana è detta invariante e si parla di una trasformazione di simmetria. In più, se la lagrangiana è invariante, allora la quantità  $Q$  definita da

$$\epsilon Q \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \quad (1.26)$$

è conservata nel tempo lungo traiettorie fisiche, ovvero la carica  $Q$  è costante <sup>3</sup>:

$$\frac{dQ}{dt} = 0. \quad (1.27)$$

In maniera speculare si può esprimere questo risultato anche nel caso in cui si abbia una densità di lagrangiana  $\mathcal{L}(\phi^a, \partial_\alpha \phi^a)$ , dove i campi  $\phi^a$  dipendono dalle coordinate  $\xi^\alpha$ . In questo caso l'invarianza della densità di lagrangiana indica la presenza di correnti conservate. Considerando una variazione infinitesima

$$\phi^a(\psi) \rightarrow \phi^a(\xi) + \delta \phi^a(\xi), \quad (1.28)$$

dove

$$\delta \phi^a = \epsilon^i h_i^a(\phi), \quad (1.29)$$

e la relativa variazione dei campi delle derivate  $\partial_\alpha \phi^a$ , se  $\mathcal{L}$  risulta essere invariante, allora le quantità

$$\epsilon^i j_i^\alpha \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \phi^a)} \delta \phi^a \quad (1.30)$$

sono delle correnti conservate:

$$\partial_\alpha j_i^\alpha = 0. \quad (1.31)$$

Qui l'indice  $i$  è stato introdotto per indicare i parametri nella trasformazione di simmetria, e di conseguenza indica il numero di correnti conservate;  $\alpha$  indica le coordinate e quindi le componenti delle correnti, mentre  $a$  numera i campi della lagrangiana. La dimostrazione di questo enunciato segue lo stesso procedimento utilizzato nel caso precedente, si veda Appendice B.

---

<sup>3</sup>Una dimostrazione di questo enunciato si può trovare in Appendice B

# Capitolo 2

## Stringhe non relativistiche

Nonostante non apporti nessun particolare risultato che sia estraneo alla meccanica ondulatoria, la trattazione della stringa non relativistica è necessaria per poter introdurre alcune grandezze che avranno successivamente un ruolo di risalto nello studio della stringa relativistica. Partendo dall'equazione del moto per oscillazioni trasversali di una stringa, si discuteranno le condizioni iniziali e al contorno, per sviluppare infine un approccio lagrangiano alla dinamica della stringa non relativistica.

### 2.1 Equazione d'onda e condizioni al contorno

Cominciamo considerando una stringa tesa lungo l'asse  $x$  che oscilla lungo l'asse  $y$  (fig. 2.1). Lavoriamo quindi sul piano  $(x, y)$ , con gli estremi della stringa  $x = 0$  e  $x = a$  fissati sull'asse  $x$ . Della stringa si conoscono anche la tensione  $T_0$  e la massa per unità di lunghezza  $\mu_0$ , che rimangono costanti lungo tutta la stringa e per tutta la durata del moto.

Supponendo che le oscillazioni siano piccole, ovvero che per ogni istante di tempo si ha

$$\left| \frac{\partial y}{\partial x} \right| \ll 1, \quad (2.1)$$

le equazioni del moto si possono ricavare facilmente analizzando la forza netta verticale, in quanto quella orizzontale è trascurabile. Prendendo un tratto infinitesimo di corda definito dagli estremi  $x$  e  $x + dx$ , e valutando la forza esercitata dalla tensione  $T_0$  su questi estremi, la forza netta verticale sarà

$$dF_v = T_0 \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x+dx} - T_0 \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_x \simeq T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx. \quad (2.2)$$

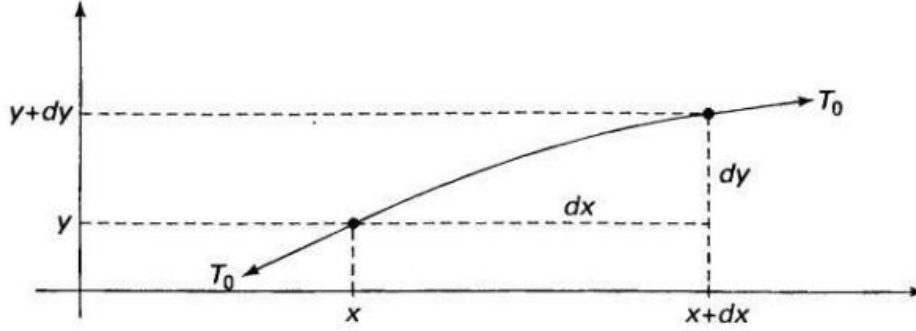


Figura 2.1: Un piccolo pezzo di stringa classica non relativistica vibrante trasversalmente. Se i due estremi hanno una pendenza diversa allora è presente una forza netta verticale diversa da zero.

A questo punto è possibile utilizzare la legge della dinamica di Newton per ottenere l'equazione del moto, sapendo che la massa  $dm$  di questo pezzetto di stringa è dato da  $\mu_0 dx$ :

$$T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx = (\mu_0 dx) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu_0}{T_0} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \quad (2.3)$$

L'equazione (2.3) risulta essere un'equazione d'onda, che descrive le onde trasversali sulla stringa che si propagano con velocità

$$v_0 = \sqrt{\frac{T_0}{\mu_0}}. \quad (2.4)$$

Essendo (2.3) un'equazione differenziale alle derivate parziali che coinvolge derivate fatte rispetto al tempo e allo spazio, per poter trovare una soluzione è necessario fissare delle condizioni iniziali e delle condizioni al contorno. Concentrandoci su queste ultime, esistono due diversi tipi di condizioni al contorno che possono essere imposte: le condizioni di Dirichlet e le condizioni di Neumann.

Le prime consistono nel fissare la posizione degli estremi della stringa, per esempio imponendo in qualsiasi istante che:

$$y(t, x = 0) = y(t, x = a) = 0. \quad (2.5)$$

Le condizioni al contorno di Neumann invece permettono agli estremi di muoversi liberamente lungo il vincolo costituito dall'asse  $y$  e dalla retta  $x = a$ , imponendo però

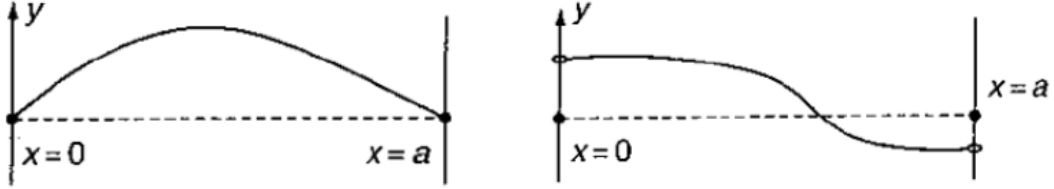


Figura 2.2: A sinistra: stringa con condizioni agli estremi di Dirichlet. A destra: stringa con condizioni al contorno di Neumann.

l'annullarsi della derivata  $\partial y / \partial x$  agli estremi della stringa

$$\frac{\partial y}{\partial x}(t, x=0) = \frac{\partial y}{\partial x}(t, x=a) = 0, \quad (2.6)$$

così da evitare che questi punti, immaginati legati ai vincoli tramite anelli senza massa, possano muoversi con accelerazione infinita. La soluzione generale dell'equazione differenziale (2.3) è della forma

$$y(t, x) = h_+(x - v_0 t) + h_-(x + v_0 t), \quad (2.7)$$

e una volta specificate le condizioni al contorno e le condizioni iniziali, ovvero i valori di  $y$  e di  $\partial y / \partial t$  al tempo  $t = 0$ , è possibile ottenere l'espressione esplicita delle funzioni  $h_+$  e  $h_-$  tramite semplici passaggi algebrici.

## 2.2 Azione per stringhe non relativistiche

L'intera trattazione della stringa non relativistica può essere svolta anche utilizzando l'azione e il principio di Hamilton.

Per prima cosa è necessario definire la lagrangiana del sistema. L'energia cinetica totale della stringa è data dall'integrale dell'energia cinetica di ogni singolo segmento infinitesimo:

$$T = \int_0^a \frac{1}{2} (\mu_0 dx) \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2. \quad (2.8)$$

L'energia potenziale invece proviene dal lavoro fatto per allungare i segmenti infinitesimi durante l'oscillazione. Prendendo l'elemento che si estende da  $(x, 0)$  a  $(x + dx, 0)$  in condizione di equilibrio, uno stiramento da  $(x, y)$  a  $(x + dx, y + dy)$  causerà un allungamento

del segmento pari a

$$\Delta l = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} - dx = dx \left( \sqrt{1 + \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2} - 1 \right) \simeq dx \frac{1}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2, \quad (2.9)$$

dove abbiamo utilizzato l'approssimazioni delle piccole oscillazioni (2.1). Il lavoro svolto sull'elemento infinitesimo è  $T_0 \Delta l$  e l'energia potenziale totale è

$$V = \int_0^a \frac{1}{2} T_0 \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (2.10)$$

A questo punto la lagrangiana del sistema è data da  $T - V$ ,

$$L(t) = \int_0^a \left[ \frac{1}{2} \mu_0 \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} T_0 \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] dx \equiv \int_0^a \mathcal{L} dx, \quad (2.11)$$

dove si è introdotta la densità di lagrangiana  $\mathcal{L}$ .

L'azione della stringa è quindi

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^a dx \left[ \frac{1}{2} \mu_0 \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} T_0 \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (2.12)$$

Variando la traiettoria  $y(t, x) \rightarrow y(t, x) + \delta y(t, x)$ , e procedendo come indicato in Appendice A, è possibile ottenere la variazione dell'azione:

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^a dx \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \mu_0 \frac{\partial y}{\partial t} \delta y \right) - \mu_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \delta y + \frac{\partial}{\partial x} \left( -T_0 \frac{\partial y}{\partial x} \delta y \right) + T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \delta y \right]. \quad (2.13)$$

Eseguendo gli integrali delle derivate totali si ricava infine

$$\begin{aligned} \delta S = & \int_0^a \left[ \mu_0 \frac{\partial y}{\partial t} \delta y \right] \Big|_{t=t_i}^{t=t_f} dx + \int_{t_i}^{t_f} \left[ -T_0 \frac{\partial y}{\partial x} \delta y \right] \Big|_{x=0}^{x=a} dt \\ & - \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^a dx \left( \mu_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \delta y \end{aligned} \quad (2.14)$$

Abbiamo tre termini, ed ognuno di essi deve annullarsi indipendentemente dagli altri. Il terzo termine definisce il moto della stringa per  $x \in (0, a)$  e  $t \in (t_i, t_f)$ . In questo dominio la variazione  $\delta y(t, x)$  non è vincolata da alcuna condizione iniziale o condizione al contorno, e quindi deve essere posto uguale a zero il coefficiente di  $\delta y$ , recuperando così le equazioni del moto (2.3). Il primo termine in (2.14) è determinato dalla configurazione della stringa al tempo  $t = t_i$  e  $t = t_f$ ; fissando una condizione iniziale e finale, si pongono uguali a zero le variazioni  $\delta y(t_i, x)$  e  $\delta y(t_f, x)$ , per cui il primo termine non apporta nessuna informazione aggiuntiva alla dinamica della stringa. Il secondo termine invece descrive il moto degli estremi della stringa.



Riscrivendolo in maniera estesa si ha

$$\int_{t_i}^{t_f} \left[ -T_0 \frac{\partial y}{\partial x}(t, a) \delta y(t, a) + T_0 \frac{\partial y}{\partial x}(t, 0) \delta y(t, 0) \right] dt. \quad (2.15)$$

Per annullare ognuno dei due termini sopra è necessario imporre delle condizioni al contorno. Detto  $x_*$  uno dei estremi, possiamo scegliere se annullare  $\partial y / \partial x(t, x_*)$  oppure se porre uguale a zero le variazioni  $\delta y(t, x_*)$ . Nel primo caso si ha una condizione al contorno di Neumann:

$$\frac{\partial y}{\partial x}(t, x_*) = 0. \quad (2.16)$$

Il secondo caso invece corrisponde ad una condizione al contorno di Dirichlet, in quanto l'annullarsi della variazione corrisponde a richiedere che

$$\frac{\partial y}{\partial t}(t, x_*) = 0. \quad (2.17)$$

Se consideriamo il momento  $p_y$  trasportato dalla stringa

$$p_y = \int_0^a \mu_0 \frac{\partial y}{\partial t} dx \quad (2.18)$$

e la sua derivata temporale

$$\frac{dp_y(t)}{dt} = \int_0^a \mu_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx = \int_0^a T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx = T_0 \left[ \frac{\partial y}{\partial x} \right]_{x=0}^{x=a}, \quad (2.19)$$

è facile verificare che le condizioni al contorno di Neumann conservano la quantità di moto, mentre per le condizioni di Dirichlet questo non avviene in generale. La conservazione torna ad essere verificata se oltre alla stringa si considera l'oggetto fisico a cui essa è legata, nel nostro caso la D-Brana; in questo modo il momento perso dalla stringa viene assorbito dalle ulteriori dimensioni che costituiscono la D-Brana e il bilancio netto è nullo.

Ai fini della trattazione lagrangiana della stringa relativistica, è possibile riscrivere i risultati appena ottenuti in maniera alternativa.

Utilizzando la densità di lagrangiana per scrivere l'azione

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^a dx \mathcal{L} \left( \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial x} \right), \quad (2.20)$$

e definite le quantità

$$\mathcal{P}^t \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = \mu_0 \frac{\partial y}{\partial t} \quad \mathcal{P}^x \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} = -T_0 \frac{\partial y}{\partial x}, \quad (2.21)$$

la variazione dell'azione diventa

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} \int_0^a dx \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \delta \dot{y} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} \delta y' \right] = \int_{t_i}^{t_f} \int_0^a dx \left[ \mathcal{P}^t \delta \dot{y} + \mathcal{P}^x \delta y' \right]. \quad (2.22)$$

Operando le solite manipolazioni, si ricava infine l'espressione

$$\begin{aligned} \delta S = & \int_0^a \left[ \mathcal{P}^t \delta y \right] \Big|_{t=t_i}^{t=t_f} dx + \int_{t_i}^{t_f} \left[ \mathcal{P}^x \delta y \right] \Big|_{x=0}^{x=a} dt \\ & - \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^a dx \left( \frac{\partial \mathcal{P}^t}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{P}^x}{\partial x} \right) \delta y, \end{aligned} \quad (2.23)$$

dalla quale è possibile ricavare l'equazione del moto

$$\frac{\partial \mathcal{P}^t}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{P}^x}{\partial x} = 0 \quad (2.24)$$

del tutto equivalente a (2.3). In particolare, le condizioni al contorno di Neumann equivalgono alla condizione  $\mathcal{P}^x = 0$ , mentre le condizioni di Dirichlet si ottengono imponendo  $\mathcal{P}^t = 0$ .

# Capitolo 3

## Il punto materiale relativistico

Lo studio dell'azione di un punto materiale relativistico è propedeutico per determinare successivamente l'azione della stringa relativistica, in quanto il procedimento logico e il significato fisico sono esattamente gli stessi. Determineremo quindi l'espressione per l'azione della particella relativistica e discuteremo le relative equazioni del moto, soffermandoci sul concetto di invarianza per riparametrizzazione.

### 3.1 Azione di una particella relativistica

Un'azione fisicamente consistente deve portare a delle equazioni del moto Lorentz-invarianti. Infatti se un osservatore vede che la particella sta eseguendo un moto fisico, in accordo con le sue equazioni del moto, allora qualsiasi altro osservatore deve concordare con lui. Sarebbe inconsistente avere un osservatore per il quale il moto della particella è permesso mentre per altri sistemi di riferimento lo stesso moto è impossibile.

Per ottenere delle equazioni del moto Lorentz-invarianti è necessario che l'azione sia uno scalare relativistico, così che per ogni linea di universo permessa, tutti gli osservatori concorderanno sul valore della relativa azione.

Lo scalare relativistico che si utilizza è il tempo proprio  $dt_p = ds/c$ , moltiplicato per la massa della particella e per  $c^2$ , in modo da avere una quantità Lorentz-invariante con le dimensioni di un'azione.

Aggiungendo un segno meno si ricava

$$S = -mc \int_P ds. \quad (3.1)$$

L'azione è quindi pari a meno l'energia a riposo della particella per il tempo proprio <sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Per una trattazione più esauriente dell'azione e della dinamica del punto materiale relativistico, si veda ancora [2].

Questa espressione può essere resa più familiare utilizzando (1.4) per relazionare  $ds$  con  $dt$ :

$$ds = c dt_p \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (3.2)$$

In questo modo l'azione può essere scritta come un integrale sul tempo:

$$S = -mc^2 \int_{t_i}^{t_f} dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (3.3)$$

dove  $t_i$  e  $t_f$  sono i valori del tempo in un punto iniziale e finale lungo la linea di universo  $P$ .

Da questa azione è possibile ricavare l'espressione della lagrangiana del punto materiale relativistico:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (3.4)$$

valida solo quando  $v < c$ , come dovrebbe essere visto che in ogni punto della linea di universo la tangente è sempre di tipo tempo.

Per verificare la correttezza delle nostre intuizioni è possibile ricavare il momento e l'energia relativistici:

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = -mc^2 \left( -\frac{v^2}{c^2} \right) \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (3.5)$$

$$H = \vec{p} \cdot \vec{v} - L = \frac{mv^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (3.6)$$

che corrispondono alle formule (1.12).

## 3.2 Invarianza per riparametrizzazione

Quando si calcola l'azione (3.1) per effettuare l'integrale è necessario parametrizzare la linea di universo della particella. Nel caso finora considerato questa parametrizzazione era data dal tempo proprio, ma il valore dell'azione non può dipendere dal parametro scelto per descrivere la linea di universo. Questo fatto è conosciuto come invarianza per riparametrizzazione.

L'azione scritta in (3.1) è manifestamente invariante per riparametrizzazione. Infatti, scelto il parametro  $\tau$  tale che

$$\tau \in [\tau_i, \tau_f], \quad x_i^\mu = x^\mu(\tau_i), \quad x_f^\mu = x^\mu(\tau_f), \quad (3.7)$$

per parametrizzare sia la coordinata temporale  $x^0$  che le coordinate spaziali, l'intervallo  $ds$  può essere riscritto in questo modo

$$ds^2 = -\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} (d\tau)^2. \quad (3.8)$$

Poiché per qualsiasi tipo di moto la velocità non eccede mai la velocità della luce, è possibile prendere la radice quadrata di (3.8) e scrivere l'azione

$$S = -mc \int_{\tau_i}^{\tau_f} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} d\tau. \quad (3.9)$$

L'invarianza per riparametrizzazione può essere controllata scegliendo un nuovo parametro  $\tau'$  e verificando che l'azione non cambia forma.

Dalla regola della catena

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{d\tau'} \frac{d\tau'}{d\tau}, \quad (3.10)$$

che sostituito dentro (3.9) porta a

$$S = -mc \int_{\tau_i}^{\tau_f} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau'} \frac{dx^\nu}{d\tau'} \frac{d\tau'}{d\tau}} d\tau = -mc \int_{\tau'_i}^{\tau'_f} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau'} \frac{dx^\nu}{d\tau'}} d\tau'. \quad (3.11)$$

L'invarianza per riparametrizzazione è quindi verificata.

### 3.3 Equazioni del moto

Ora che abbiamo l'espressione dell'azione, siamo in grado di ricavare le equazioni del moto per la particella relativistica.

Per prima cosa ricaviamo dalla relazione  $ds^2 = (ds)^2$  la variazione di  $ds$  differenziando entrambi i membri:

$$2ds\delta(ds) = -2\eta_{\mu\nu} \delta\left(\frac{dx^\mu}{d\tau}\right) \frac{dx^\nu}{d\tau} (d\tau)^2. \quad (3.12)$$

Il fattore 2 a secondo membro viene dalla simmetria delle variazioni  $\frac{dx^\mu}{d\tau}$  e  $\frac{dx^\nu}{d\tau}$ , che portano lo stesso contributo. Poiché la variazione della velocità è uguale alla derivata temporale della variazione delle coordinate, si ottiene

$$\delta(ds) = -\eta_{\mu\nu} \frac{d(\delta x^\mu)}{d\tau} \frac{dx^\nu}{ds} = -\frac{d(\delta x^\mu)}{d\tau} \frac{dx_\mu}{ds} d\tau. \quad (3.13)$$

Sostituendo (3.13) nella variazione dell'azione, si ricava la seguente espressione:

$$\delta S = mc \int_{\tau_i}^{\tau_f} \frac{d(\delta x^\mu)}{d\tau} \frac{dx_\mu}{ds} d\tau = \int_{\tau_i}^{\tau_f} \frac{d(\delta x^\mu)}{d\tau} p_\mu d\tau, \quad (3.14)$$

dove si è usata la definizione di momento relativistico. Per avere le equazioni del moto, non ci possono esserci delle derivate della variazione  $\delta x^\mu$ ; riscriviamo quindi (3.14) come una derivata totale più un termine proporzionale a  $\delta x^\mu$ :

$$\delta S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \frac{d}{d\tau} (\delta x^\mu p_\mu) - \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \delta x^\mu(\tau) \frac{dp_\mu}{d\tau}. \quad (3.15)$$

Il primo termine restituisce  $\delta x^\mu p_\mu$  valutato agli estremi della linea di universo. Questo termine quindi può essere annullato fissando delle condizioni al contorno. Il secondo termine invece deve annullarsi per qualsiasi variazione  $\delta x^\mu$ , e quindi porta alle equazioni del moto

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = 0. \quad (3.16)$$

La quantità di moto della particella relativistica è quindi costante lungo tutta la linea di universo, indipendentemente dalla parametrizzazione scelta per quest'ultima, grazie all'invarianza per riparametrizzazione dell'azione. Se come parametro si sceglie il tempo proprio  $s$ , allora l'equazione del moto diventa

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} = 0. \quad (3.17)$$

# Capitolo 4

## Stringhe relativistiche

Cominciamo ora il nostro studio della stringa relativistica, che porterà a risultati e proprietà fisiche molto più interessanti della stringa non relativistica. Seguendo il procedimento logico utilizzato per la particella relativistica, definiamo l'area propria tracciata dalla stringa nello spazio tempo e deduciamo la sua azione. Studieremo la proprietà di invarianza per riparametrizzazione di questa area propria e troveremo le equazioni del moto. Per stringhe aperte, ci focalizzeremo sugli estremi della stringa e definiremo meglio il concetto di D-Brana. Infine vedremo che il solo moto fisico ammesso è quello trasversale alla stringa ed introdurremo la velocità trasversale della stringa.

### 4.1 Funzionale d'area e invarianza per riparametrizzazione

Così come l'azione del punto materiale relativistico è un funzionale della linea di universo, così l'azione della stringa relativistica è un funzionale della sua traiettoria nello spazio-tempo, ovvero è un funzionale della superficie bidimensionale descritta dalla stringa nello spazio-tempo, detta superficie di universo. Fissato un istante di tempo  $x^0$ , l'osservatore vede la stringa in quell'istante, e la sua evoluzione temporale determina la forma della superficie di universo.

Procedendo come nel caso della particella relativistica, cercheremo in particolare un'azione che sia Lorentz-invariante. Vogliamo quindi descrivere la superficie di universo tramite un'area propria, funzione di due parametri, così come la linea di universo era descritta dal tempo proprio funzione del parametro  $\tau$ . Per fare questo consideriamo prima una superficie immersa solamente nello spazio, e non nello spazio-tempo.

Siano  $\xi^1$  e  $\xi^2$  i due parametri che tramite la mappa

$$\vec{x}(\xi^1, \xi^2) = \left( x^1(\xi^1, \xi^2), x^2(\xi^1, \xi^2), x^3(\xi^1, \xi^2) \right) \quad (4.1)$$

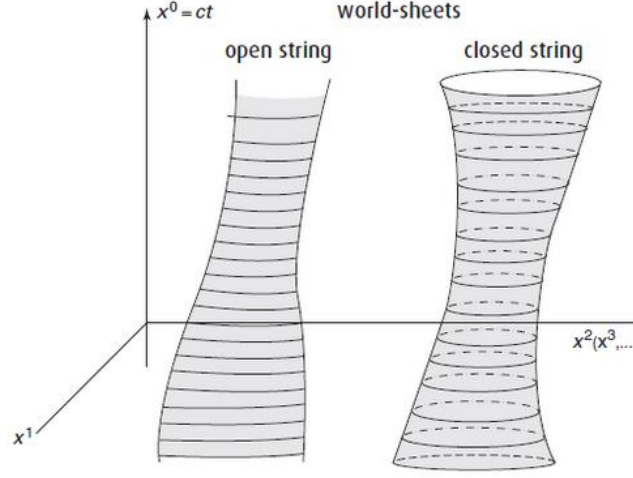


Figura 4.1: la superficie di universo tracciata da una stringa aperta, a sinistra, e da una stringa chiusa, a destra.

definiscono la nostra superficie in  $\mathbb{R}^3$ . Per calcolare l'elemento d'area infinitesimo definiamo le immagini dei segmenti infinitesimi  $d\xi^1$  e  $d\xi^2$  tramite la mappa  $\vec{x}$

$$d\vec{v}_1 = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} d\xi^1 \quad d\vec{v}_2 = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} d\xi^2. \quad (4.2)$$

L'elemento d'area sarà dato quindi dall'area del parallelogramma descritto da  $d\vec{v}_1$  e  $d\vec{v}_2$ :

$$dA = |d\vec{v}_1||d\vec{v}_2|\sin\theta = |d\vec{v}_1||d\vec{v}_2|\sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{|d\vec{v}_1|^2|d\vec{v}_2|^2 - |d\vec{v}_1|^2|d\vec{v}_2|^2\cos^2\theta}. \quad (4.3)$$

In termini di prodotto scalare, questa si riscrive

$$\begin{aligned} dA &= \sqrt{(d\vec{v}_1 \cdot d\vec{v}_1)(d\vec{v}_2 \cdot d\vec{v}_2) - (d\vec{v}_1 \cdot d\vec{v}_2)^2} \\ &= d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1}\right)\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2}\right) - \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2}\right)^2}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

L'area totale della superficie sarà data dall'integrale sull'intero range di  $\xi^1$  e  $\xi^2$  di  $dA$ :

$$A = \int d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1}\right)\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2}\right) - \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2}\right)^2}. \quad (4.5)$$

Il valore dell'area della superficie appena trovato deve essere indipendente dalla scelta dei parametri; così facendo sarà invariante per riparametrizzazione anche l'azione che



costruiremo a partire dall'area propria. Per rendere esplicito questo fatto, modifichiamo dapprima l'espressione della nostra area.

Sia  $d\vec{x}$  un vettore tangente alla superficie. In funzione di  $\xi^1$  e  $\xi^2$  sarà scritto come

$$d\vec{x} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} d\xi^1 + \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} d\xi^2 = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^i} d\xi^i. \quad (4.6)$$

La lunghezza di questo segmento può essere ottenuta eseguendo il seguente prodotto scalare:

$$ds^2 \equiv (ds)^2 = d\vec{x} \cdot d\vec{x} = \left( \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^i} d\xi^i \right) \cdot \left( \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^j} d\xi^j \right) = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^j} d\xi^i d\xi^j. \quad (4.7)$$

Questa può essere sintetizzata in

$$ds^2 = g_{ij}(\xi) d\xi^i d\xi^j, \quad (4.8)$$

dove  $g_{ij}$ , definita come

$$g_{ij}(\xi) = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^j} \quad (4.9)$$

è la metrica indotta sulla superficie dalla parametrizzazione. In particolare, osservando la forma matriciale esplicita di  $g_{ij}$ ,

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} & \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} & \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} \end{pmatrix},$$

si può notare come il determinante di  $g_{ij}$  sia precisamente la quantità che si trova sotto radice quadrata in (4.5). Posto  $g \equiv \det(g_{ij})$ , si può quindi scrivere

$$A = \int d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{g}. \quad (4.10)$$

A questo punto basterà dimostrare l'indipendenza dell'area dalla parametrizzazione usando (4.10).

Consideriamo un nuovo set di parametri  $\tilde{\xi}$ , e definiamo le matrici

$$M = M_{ij} = \frac{\partial \xi^i}{\partial \tilde{\xi}^j} \quad \tilde{M} = \tilde{M}_{ij} = \frac{\partial \tilde{\xi}^i}{\partial \xi^j}, \quad (4.11)$$

per le quali è possibile dimostrare che vale la relazione

$$|\det M| |\det \tilde{M}| = 1. \quad (4.12)$$

La chiave che permette di verificare che l'area non dipende dalla parametrizzazione risiede in (4.8). Poiché la lunghezza  $ds^2$  è una proprietà geometrica del vettore  $d\vec{x}$ , questa non può cambiare se cambiano i parametri con cui la calcolo. Si ha quindi la relazione

$$\begin{aligned} g_{ij}(\xi) d\xi^i d\xi^j &= \tilde{g}_{pq}(\tilde{\xi}) d\tilde{\xi}^p d\tilde{\xi}^q \\ \rightarrow g_{ij}(\xi) &= \tilde{g}_{pq}(\tilde{\xi}) \frac{\partial \tilde{\xi}^p}{\partial \xi^i} \frac{\partial \tilde{\xi}^q}{\partial \xi^j} = \tilde{g}_{pq} \tilde{M}_{pi} \tilde{M}_{qj} = (\tilde{M}^T)_{ip} \tilde{g}_{pq} \tilde{M}_{qj}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Prendendo il determinante dell'equazione sopra e facendone la radice quadrata si ottiene infine

$$\sqrt{g} = \sqrt{\tilde{g}} |\det \tilde{M}|. \quad (4.14)$$

Finalmente, l'invarianza per riparametrizzazione dell'area della superficie può essere verificata osservando che

$$\int d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{g} = \int d\tilde{\xi}^1 d\tilde{\xi}^2 |\det M| \sqrt{\tilde{g}} |\det \tilde{M}| = \int d\tilde{\xi}^1 d\tilde{\xi}^2 \sqrt{\tilde{g}}. \quad (4.15)$$

Abbiamo ora tutti gli elementi per generalizzare tutte le considerazioni che sono state fatte al caso di una superficie che si estende nello spazio-tempo <sup>1</sup>.

Come parametri scegliamo  $\tau$  e  $\sigma$ , dove  $\sigma$  varia tra zero e un certo  $\sigma^1$  mentre  $\tau$  può andare da meno a più infinito. Il parametro  $\tau$  è legato al tempo, mentre  $\sigma$  è legato alla posizione sulla stringa.

Sulla superficie di universo le coordinate dello spazio-tempo  $x^\mu$  non sono altro che le immagini della mappa  $x^\mu(\tau, \sigma)$ ; tali immagini, dette coordinate della stringa, saranno indicate d'ora in avanti con  $X^\mu(\tau, \sigma) = x^\mu$ .

---

<sup>1</sup>Per approfondire i numerosi aspetti della geometria differenziale non trattati in questa sede, si rimanda a [4]

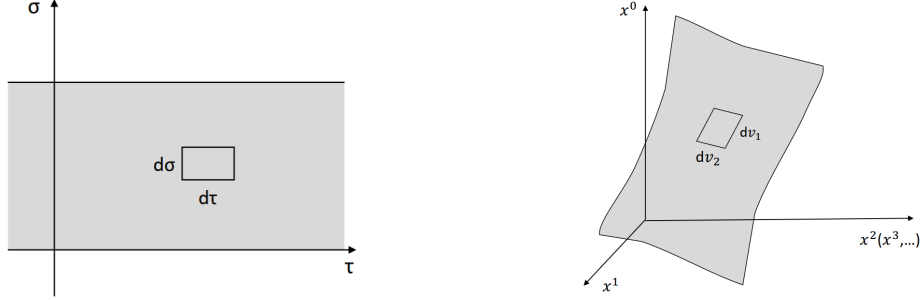


Figura 4.2: A sinistra: lo spazio dei parametri  $(\tau, \sigma)$ , nel quale è selezionato un piccolo rettangolo. A destra: la superficie di universo descritta dalla mappa  $x^\mu(\tau, \sigma)$ . L'immagine del rettangolo è un parallelogramma i cui lati sono  $dv_1^\mu$  e  $dv_2^\mu$ .

Per il significato implicito dei parametri scelti, le estremità della stringa hanno  $\sigma$  costante e quindi sono solo funzione di  $\tau$ . Ma con lo scorrere del tempo anche  $\tau$  deve cambiare, per cui agli estremi si ha che

$$\left. \frac{\partial X^0}{\partial \tau} \right|_{\text{estremi}} \neq 0. \quad (4.16)$$

Procedendo come fatto precedentemente, definiamo i due vettori tangenti alla superficie

$$dv_1^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} d\tau, \quad dv_2^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} d\sigma, \quad (4.17)$$

e calcoliamo l'elemento d'area facendo

$$dA = \sqrt{(dv_1 \cdot dv_1)(dv_2 \cdot dv_2) - (dv_1 \cdot dv_2)^2}, \quad (4.18)$$

dove il punto indica il prodotto scalare relativistico. In questo modo l'area risulta essere un invariante relativistico e quindi è a tutti gli effetti un'area propria. È possibile dimostrare <sup>2</sup> che la quantità sotto radice deve essere cambiata di segno per far sì che essa sia positiva e che quindi sia lecito farne la radice quadrata.

Così l'area propria diventa

$$\begin{aligned} A &= \int d\tau d\sigma \sqrt{\left( \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma} \right)^2 - \left( \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \tau} \right) \left( \frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma} \frac{\partial X_\nu}{\partial \sigma} \right)} \\ &= \int d\tau d\sigma \sqrt{\left( \frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma} \right)^2 - \left( \frac{\partial X}{\partial \tau} \right)^2 \left( \frac{\partial X}{\partial \sigma} \right)^2}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

L'esigenza di cambiare il segno all'argomento della radice in (4.18) nasce da considerazioni puramente fisiche. Ogni punto della stringa deve avere infatti almeno un vettore tangente alla superficie di universo di tipo tempo e almeno un vettore tangente di

tipo-spazio. Al massimo potrebbero esserci, in ogni istante di tempo, un numero finito di punti dove lo spazio tangente non include un vettore di tipo tempo. Questi punti, per eseguire un moto fisicamente possibile, viaggiano alla velocità della luce.

Per dimostrare la prima affermazione basta fare alcune osservazioni. Un vettore di tipo spazio è sempre presente: ad ogni istante di tempo fissato, basta considerare per ogni punto il vettore tangente diretto lungo la stringa. Infatti due punti adiacenti della stringa sono simultanei e spazialmente separati. Similmente, ogni punto della stringa deve svolgere un moto fisicamente permesso. Anche se quindi non possiamo seguire il moto del punto, per via dell'invarianza per riparametrizzazione, sappiamo che avrà una velocità minore o al più uguale a quella della luce, per cui esisterà sempre, tranne che per alcuni punti isolati, un vettore tangente di tipo tempo.

L'esistenza in ogni punto regolare della stringa di un vettore tangente alla superficie di universo di tipo tempo e di un vettore tangente di tipo spazio permette di selezionare i moti accettabili fisicamente e rende matematicamente valida l'espressione (4.19) dell'area propria.

## 4.2 Azione di Nambu-Goto

Ora che abbiamo l'area propria ben definita in (4.19), seguendo lo stesso procedimento utilizzato per la particella relativistica, possiamo scrivere l'azione per la stringa relativistica. Questa sarà proporzionale all'area propria moltiplicata per una forza su velocità, in modo da avere le giuste unità di misura. Scriveremo quindi

$$S = -\frac{T_0}{c} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}, \quad (4.20)$$

dove abbiamo introdotto le notazioni

$$\dot{X}^\mu \equiv \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}, \quad X^{\mu'} \equiv \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}. \quad (4.21)$$

L'equazione (4.20) è nota come azione di Nambu-Goto.

L'invarianza per riparametrizzazione può essere resa evidente procedendo come per la superficie spaziale. Introducendo la metrica indotta sulla superficie di universo

$$\gamma_{\alpha\beta} \equiv \eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} = \frac{\partial X}{\partial \xi^\alpha} \cdot \frac{\partial X}{\partial \xi^\beta}, \quad (4.22)$$

dove  $\eta_{\mu\nu}$  è la metrica di Minkowski e  $\alpha$  e  $\beta$  assumono i valori 1 e 2, con  $\xi^1 = \tau$  e  $\xi^2 = \sigma$ , la lunghezza infinitesima della superficie di universo si scrive

$$-ds^2 = dX^\mu dX_\mu = \eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu = \gamma_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta, \quad (4.23)$$

e il determinante di  $\gamma_{\alpha\beta}$  corrisponde all'argomento della radice in (4.20). L'azione di Nambu-Goto in una forma manifestamente invariante per riparametrizzazione è quindi

$$S = -\frac{T_0}{c} \int d\tau d\sigma \sqrt{\gamma}, \quad \gamma = \det(\gamma_{\alpha\beta}). \quad (4.24)$$

La stessa analisi eseguita in sezione 4.1 può essere riportata in questo caso, dimostrando esplicitamente il risultato enunciato.

### 4.3 Equazioni del moto, condizioni al contorno e D-Brane

Per determinare le equazioni del moto conviene riscrivere l'azione di Nambu-Goto utilizzando la densità di lagrangiana:

$$S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \mathcal{L}(\dot{X}^\mu, X^{\mu'}). \quad (4.25)$$

La variazione dell'azione <sup>3</sup> sarà allora

$$\delta S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} \frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^{\mu'}} \frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial \sigma} \right]. \quad (4.26)$$

Per motivi sia fisici che di notazione, introduciamo le grandezze

$$\mathcal{P}_\mu^\tau \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} = -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X} \cdot X') X'_\mu - (X')^2 \dot{X}_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}}, \quad (4.27)$$

$$\mathcal{P}_\mu^\sigma \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^{\mu'}} = -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X} \cdot X') \dot{X}_\mu - (\dot{X})^2 X'_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}}. \quad (4.28)$$

La variazione (4.26) diventa

$$\delta S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} (\delta X^\mu \mathcal{P}_\mu^\tau) + \frac{\partial}{\partial \sigma} (\delta X^\mu \mathcal{P}_\mu^\sigma) - \delta X^\mu \left( \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} \right) \right]. \quad (4.29)$$

Il primo termine a destra, essendo una derivata totale rispetto a  $\tau$ , contribuirà con termini proporzionali a  $\delta X^\mu(\tau_f, \sigma)$  e  $\delta X^\mu(\tau_i, \sigma)$ . Poiché lo scorrere di  $\tau$  implica lo scorrere del tempo, specificando lo stato iniziale e finale della stringa è possibile porre a zero le variazioni  $\delta X^\mu(\tau_f, \sigma)$  e  $\delta X^\mu(\tau_i, \sigma)$ . L'equazione (4.29) si riduce perciò a

$$\delta S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau [\delta X^\mu \mathcal{P}_\mu^\sigma]_0^{\sigma_1} - \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \delta X^\mu \left( \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} \right). \quad (4.30)$$

---

<sup>3</sup>Per i dettagli, v. Appendice A

Il secondo termine a secondo membro deve annullarsi per ogni variazione  $\delta X^\mu$ , e porta quindi all'equazione del moto

$$\frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} = 0, \quad (4.31)$$

che al momento risulta essere molto complicata.

Il primo termine invece descrive il movimento degli estremi della stringa, ed è in particolare un insieme di  $D$  equazioni, una per ciascun valore di  $\mu$ , che assume i valori  $0, 1, \dots, d$ , dove  $d$  è il numero di dimensioni spaziali dello spazio-tempo che stiamo considerando. Sono necessarie quindi  $2D$  condizioni al contorno per annullare complessivamente il primo termine in (4.30).

Fissato  $\mu$ , sia  $\sigma^* = \{0, \sigma_1\}$  la  $\sigma$  coordinata di un estremo. Come nel caso della stringa non relativistica, è possibile imporre due diversi tipi di condizioni al contorno. Il primo è una condizione di Dirichlet, ovvero

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}(\tau, \sigma^*) = 0, \quad \mu \neq 0. \quad (4.32)$$

Questa condizione al contorno può essere applicata solo alle componenti spaziali dell'estremo. Il secondo tipo di condizione al contorno è quello dell'estremo libero:

$$\mathcal{P}_\mu^\sigma(\tau, \sigma^*) = 0. \quad (4.33)$$

Il nome proviene dal fatto che non viene imposto nessun vincolo alla variazione  $\delta X^\mu(\tau, \sigma^*)$  dell'estremo. L'estremo può quindi muoversi liberamente lungo la direzione  $\mu$  fissata. In particolare questa condizione deve valere per  $\mu = 0$ :

$$\mathcal{P}_0^\sigma(\tau, 0) = \mathcal{P}_0^\sigma(\tau, \sigma_1) = 0. \quad (4.34)$$

Dallo studio della stringa non relativistica è evidente che una condizione di Dirichlet nasce nel momento in cui l'estremo è fissato ad un oggetto fisico. Gli oggetti ai quali gli estremi delle stringhe aperte sono fissati sono le D-Brane, e sono caratterizzati dalla loro dimensionalità, ovvero dal numero di dimensioni spaziali che hanno. Per esempio, in fig. 4.3 è rappresentata una stringa i cui estremi sono vincolati a muoversi sul piano  $(x^1, x^2)$ ; è perciò fissata ad una D2-Brana, ovvero a una D-Brana avente due dimensioni. La condizione di Dirichlet si applicherà alla direzione perpendicolare al piano, quindi la coordinata  $X^3$  della stringa deve annullarsi agli estremi, mentre per le coordinate  $X^1$  e  $X^2$  si avranno delle condizioni di estremo libero. Quando le condizioni al contorno libere valgono per tutte le direzioni spaziali, si ha ancora una D-Brana che però in questo caso riempie l'intero spazio.

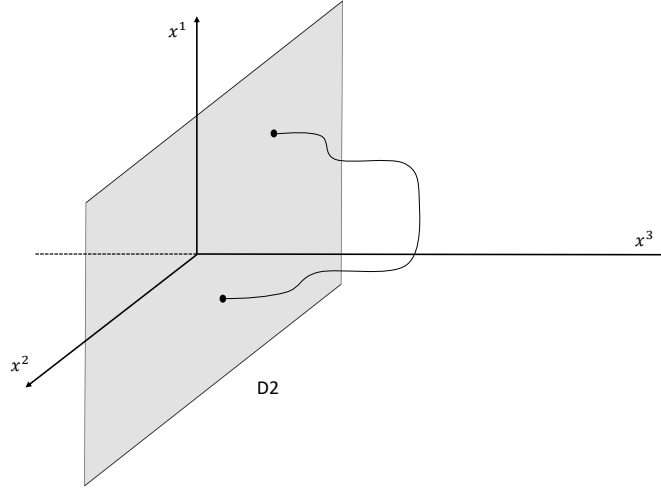


Figura 4.3: una D2-brana che si estende sul piano  $(x^1, x^2)$ . Gli estremi della stringa possono muoversi liberamente sul piano, ma sono vincolati ad esso. La coordinata  $x^3$  degli estremi, quindi, è nulla in ogni istante di tempo e soddisfa una condizione di Dirichlet.

#### 4.4 Gauge statico ed esempio di una stringa stirata

L'equazione del moto in (4.31) è troppo complicata per ricavarne una soluzione esplicita o per dedurre le proprietà fisiche e dinamiche della stringa. Per farlo è necessario scegliere una parametrizzazione per  $\tau$  e per  $\sigma$  che semplifichi la (4.31).

L'invarianza per riparametrizzazione dell'azione e di conseguenza dell'equazione del moto consente, in ultima analisi, di poter scegliere la parametrizzazione che si desidera sapendo che questa scelta non modificherà il contenuto fisico presente nell'azione.

Cominciamo quindi fissando una parametrizzazione per  $\tau$ . Scelto un iperpiano di tempo costante  $t = t_0$ , l'intersezione tra questo e la superficie di universo identificherà una curva, la stringa al tempo  $t_0$  (vedi fig. 4.4). È possibile estendere questo procedimento per ogni istante di tempo  $t$ , e decidere di porre la curva corrispondente allo stato della stringa in quell'istante ad un valore costante di  $\tau$ . La scelta che stiamo facendo è quindi quella di identificare per ogni punto  $Q$  sulla superficie di universo

$$\tau(Q) = t(Q) \rightarrow \tau = t. \quad (4.35)$$

Questa scelta di parametrizzazione per  $\tau$  è detta di *gauge statico*, in quanto linee di  $\tau$  costante corrispondono a stringhe "statiche" per l'osservatore scelto. Per il momento non parametrizzeremo  $\sigma$ , imponendo semplicemente che agli estremi si abbia  $\sigma = \{0, \sigma_1\}$  e che le linee con  $\sigma$  costante varino con continuità, senza incrociarsi, e siano consistenti con i contorni della superficie di universo.

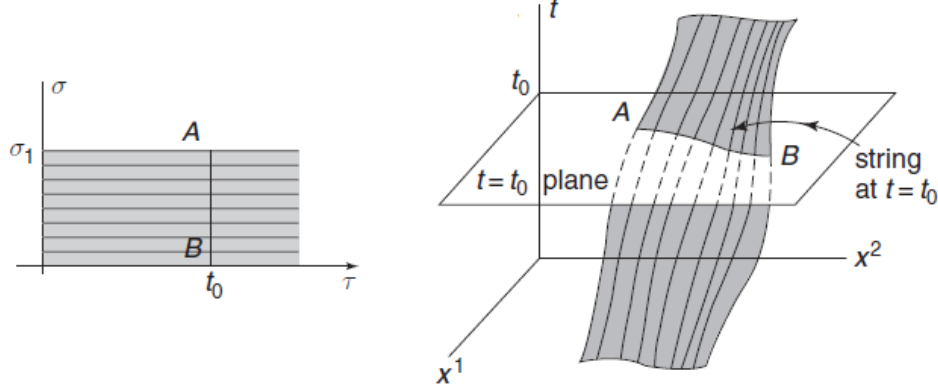


Figura 4.4: A sinistra: spazio dei parametri per una stringa aperta. Il segmento  $AB$  è la linea  $\tau = t_0$ . A destra: Superficie di universo della stringa. Utilizzando il gauge statico, la stringa al tempo  $t = t_0$  è l'immagine del segmento  $AB$ , ed è data dall'intersezione della superficie di universo con l'iperpiano  $t = t_0$ .

Quindi le coordinate della stringa  $X^\mu$  possono essere descritte come

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu(t, \sigma) = \{ct, \vec{X}(t, \sigma)\}, \quad (4.36)$$

dove con  $\vec{X}$  indichiamo le coordinate spaziali della stringa.

Inoltre, le derivate parziali presenti nell'azione di Nambu-Goto (4.20) diventeranno

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} = \left( \frac{\partial X^0}{\partial \sigma}, \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right) = \left( 0, \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right), \quad (4.37)$$

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} = \left( \frac{\partial X^0}{\partial t}, \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right) = \left( c, \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right). \quad (4.38)$$

Consideriamo ora un piccolo esempio. Prendiamo una stringa relativistica stirata lungo l'asse spaziale  $x^1$ . Gli estremi abbiano coordinate spaziali  $(0, \vec{0})$  e  $(a, \vec{0})$ . Utilizzando il gauge statico, le coordinate spaziali di questa stringa immobile lungo l'asse  $x^1$  saranno

$$X^1(t, \sigma) = f(\sigma), \quad X^2 = X^3 = \dots = X^d = 0, \quad (4.39)$$

dove  $f(0) = 0$ ,  $f(\sigma_1) = a$  e  $f(\sigma)$  è una funzione monotona crescente e continua della variabile  $\sigma \in [0, \sigma_1]$ . Segue che

$$\vec{X}^\mu = (c, 0, \vec{0}), \quad X'^\mu = (0, f', \vec{0}), \quad (4.40)$$



per cui si ha

$$(\vec{X})^2 = -c^2, \quad (X')^2 = (f')^2, \quad \vec{X} \cdot X' = 0. \quad (4.41)$$

L'azione (4.20) può essere allora calcolata facendo

$$\begin{aligned} S &= -\frac{T_0}{c} \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{0 - (-c^2)(f')^2} \\ &= -T_0 \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^{\sigma_1} d\sigma \frac{df}{d\sigma} = \int_{t_i}^{t_f} dt (-T_0 a). \end{aligned} \quad (4.42)$$

È possibile interpretare fisicamente questo risultato osservando che l'azione è data dall'integrale nel tempo della lagrangiana. Poiché in questo caso l'energia cinetica è nulla, la lagrangiana si riduce al solo termine potenziale, e si può quindi concludere che

$$V = T_0 a. \quad (4.43)$$

L'identità sopra assume significato se alla grandezza  $T_0$  introdotta nell'azione di Nambu-Goto viene identificato il ruolo di tensione della stringa. In questo modo, l'energia potenziale proviene dall'energia totale che è stata fornita per creare una stringa di lunghezza  $a$  con tensione  $T_0$ . Immaginando di stirare e allungare un pezzetto infinitesimo di stringa, il lavoro fatto si converte in energia a riposo della stringa, o in massa a riposo. La massa a riposo per unità di lunghezza è

$$\mu_0 c^2 = \frac{V}{a} = T_0 \rightarrow \mu_0 = \frac{T_0}{c^2}. \quad (4.44)$$

Per questo motivo le stringhe relativistiche sono anche dette stringhe senza massa, in quanto la massa per unità di lunghezza è presente solo se la stringa ha una tensione.

## 4.5 Velocità trasversale e moto degli estremi

L'invarianza per riparametrizzazione se da un lato permette di semplificare notevolmente le equazioni del moto, dall'altro limita la nostra capacità di analizzare la dinamica della stringa. Abbiamo scelto una parziale parametrizzazione ponendo  $\tau = t$ , ma rimane non univoca la parametrizzazione di  $\sigma$ .

Questo fatto ha due ripercussioni. Il primo è che non è possibile conoscere l'evoluzione temporale dei punti di una stringa, eccetto che per gli estremi. Infatti preso un punto interno della stringa all'istante di tempo  $t$ , non siamo in grado di dire ad un istante di tempo successivo  $t + \delta t$  in quale posizione si sia spostato, perché è sempre possibile riparametrizzare diversamente  $\sigma$ , e cambiare di conseguenza la posizione dei punti sulla stringa. Per lo stesso motivo eventuali moti longitudinali alla stringa perdono il loro significato fisico.

In secondo luogo, risulta problematico definire una velocità della stringa. Il primo candidato potrebbe essere  $\partial\vec{X}/\partial t$ , ma questa velocità dipende dalla scelta di  $\sigma$ . La sua direzione infatti è lungo le linee che mantengono  $\sigma$  costante, e queste possono cambiare al variare della parametrizzazione scelta per  $\sigma$ .

Esiste però una velocità che sia invariante per riparametrizzazione, ovvero che non dipende da  $\sigma$ , ed è la velocità trasversale. Considerando la superficie spaziale spazzata dalla stringa man mano che questa evolve temporalmente, la velocità trasversale  $\vec{v}_\perp$  è quella velocità che in ogni punto della stringa è perpendicolare alla stringa stessa e tangente alla superficie spaziale.

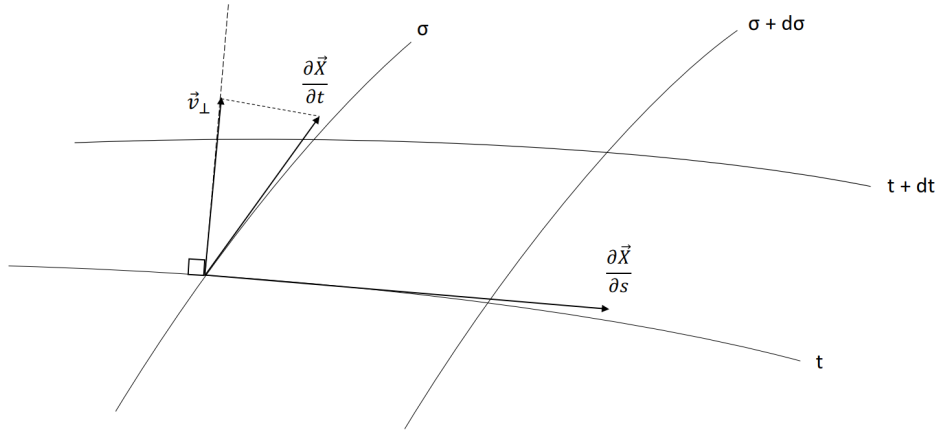


Figura 4.5: Una piccola porzione di superficie di universo sulla quale sono riportati il vettore  $\partial\vec{X}/\partial t$ , la velocità trasversale  $\vec{v}_\perp$  e il vettore unitario  $\partial\vec{X}/\partial s$ .

Per definire  $\vec{v}_\perp$  introduciamo un nuovo parametro, la lunghezza d'arco  $s$ . Sia quindi  $s(\sigma)$  la lunghezza della stringa nell'intervallo  $[0, \sigma]$ . La lunghezza infinitesima del vettore  $d\vec{X}$  dato dall'intervallo  $d\sigma$  sarà allora

$$ds = |d\vec{X}| = \left| \frac{\partial\vec{X}}{\partial\sigma} \right| d\sigma. \quad (4.45)$$

La variazione di  $\vec{X}$  rispetto alla lunghezza della stringa,  $\partial\vec{X}/\partial s$ , è un vettore unitario,

$$\frac{\partial\vec{X}}{\partial s} \cdot \frac{\partial\vec{X}}{\partial s} = \frac{\partial\vec{X}}{\partial\sigma} \cdot \frac{\partial\vec{X}}{\partial\sigma} \left( \frac{d\sigma}{ds} \right)^2 = \left| \frac{\partial\vec{X}}{\partial\sigma} \right|^2 \left( \frac{d\sigma}{ds} \right)^2 = 1, \quad (4.46)$$

ed è inoltre tangente alla stringa

$$\frac{\partial\vec{X}}{\partial s} = \frac{\partial\vec{X}}{\partial\sigma} \frac{d\sigma}{ds}. \quad (4.47)$$

Definiamo allora la velocità trasversale  $\vec{v}_\perp$  come la componente della velocità  $\partial\vec{X}/\partial t$  in direzione perpendicolare alla stringa, ovvero

$$\vec{v}_\perp = \frac{\partial\vec{X}}{\partial t} - \left( \frac{\partial\vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial\vec{X}}{\partial s} \right) \frac{\partial\vec{X}}{\partial s}. \quad (4.48)$$

Per convenienza, calcoliamone anche il modulo quadro:

$$v_\perp^2 = \left( \frac{\partial\vec{X}}{\partial t} \right)^2 - \left( \frac{\partial\vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial\vec{X}}{\partial s} \right)^2. \quad (4.49)$$

Utilizzando l'espressione appena trovata di  $\vec{v}_\perp$  e il gauge statico è possibile semplificare l'azione di Nambu-Goto. Si ha che

$$(\dot{X})^2 = -c^2 + \left( \frac{\partial\vec{X}}{\partial t} \right)^2, \quad (X')^2 = \left( \frac{\partial\vec{X}}{\partial s} \right)^2, \quad \dot{X} \cdot X' = \frac{\partial\vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial\vec{X}}{\partial s}. \quad (4.50)$$

Con semplici calcoli algebrici e utilizzando (4.49), l'azione diventa

$$S = -T_0 \int dt \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left( \frac{ds}{d\sigma} \right) \sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}. \quad (4.51)$$

La lagrangiana associata è

$$L = -T_0 \int ds \sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}, \quad (4.52)$$

che è l'integrale lungo la stringa di (meno) l'energia di riposo  $T_0 ds$  di ogni singolo segmento infinitesimo per un fattore relativistico locale. In questa forma è quindi evidente che è una generalizzazione della lagrangiana della particella relativistica (3.4).

La velocità trasversale e il gauge statico possono essere utilizzati anche per semplificare le espressioni (4.27) e (4.28) di  $\mathcal{P}_\mu^\tau$  e  $\mathcal{P}_\mu^\sigma$ . Si trova:

$$\mathcal{P}_\mu^\sigma = -\frac{T_0}{c^2} \frac{\left( \frac{\partial\vec{X}}{\partial s} \cdot \frac{\partial\vec{X}}{\partial t} \right) \dot{X}_\mu + \left( c^2 - \left( \frac{\partial\vec{X}}{\partial t} \right)^2 \right) \frac{\partial X_\mu}{\partial s}}{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}}, \quad (4.53)$$

$$\mathcal{P}_\mu^\tau = \frac{T_0}{c^2} \frac{ds}{d\sigma} \frac{\dot{X}_\mu - \left( \frac{\partial\vec{X}}{\partial s} \cdot \frac{\partial\vec{X}}{\partial t} \right) \frac{\partial X_\mu}{\partial s}}{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}}. \quad (4.54)$$

In particolare

$$\mathcal{P}_0^\sigma = -\frac{T_0}{c} \frac{\left( \frac{\partial\vec{X}}{\partial s} \cdot \frac{\partial\vec{X}}{\partial t} \right)}{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}}, \quad (4.55)$$

$$\mathcal{P}_0^\tau = \frac{T_0}{c} \frac{ds}{d\sigma} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}}, \quad \vec{\mathcal{P}}^\tau = \frac{T_0}{c^2} \frac{ds}{d\sigma} \frac{\vec{v}_\perp}{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}}. \quad (4.56)$$

Se in generale per i punti interni non è possibile conoscere il loro moto e la loro velocità, per gli estremi liberi di una stringa aperta si possono ottenere più informazioni. La condizione di moto libero prevede che  $\mathcal{P}_\mu^\sigma = 0$ . In particolare è sempre vero che agli estremi  $\mathcal{P}_0^\sigma$  si annulla; utilizzando (4.55) si ricava che

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = 0 \quad \text{agli estremi.} \quad (4.57)$$

Poiché  $\partial \vec{X}/\partial s$  è un vettore unitario tangente alla stringa, la velocità della stringa  $\partial \vec{X}/\partial t$  è perpendicolare alla stringa e coincide con  $\vec{v}_\perp$ .

Inoltre, utilizzando (4.57), si può semplificare l'espressione (4.53) per  $\mathcal{P}_\mu^\sigma$  come segue:

$$\mathcal{P}_\mu^\sigma = -T_0 \sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}} \frac{\partial X_\mu}{\partial s} \quad \text{agli estremi.} \quad (4.58)$$

Per le coordinate spaziali questo porta all'equazione

$$\vec{\mathcal{P}}^\sigma = -T_0 \sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}} \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} = 0, \quad (4.59)$$

ma poiché  $\partial \vec{X}/\partial s$  è un vettore unitario, si ottiene infine che gli estremi liberi viaggiano alla velocità della luce:

$$\vec{v} = \vec{v}_\perp = c. \quad (4.60)$$

# Capitolo 5

## Parametrizzazione totale e moto classico

L'ultimo passaggio necessario per poter risolvere completamente l'equazione del moto (4.31) della stringa relativistica è fissare una parametrizzazione per  $\sigma$ . Di seguito quindi sceglieremo la densità di energia come parametrizzazione, capace di semplificare (4.31) in un sistema contenente l'equazione delle onde e due condizioni non lineari. Infine determineremo una soluzione generale di tale sistema <sup>1</sup>.

### 5.1 Parametrizzazione di $\sigma$ ed equazioni del moto

Nel capitolo precedente abbiamo già scelto il gauge statico come parametrizzazione di  $\tau$ . In questo modo il moto della stringa è definito dalle funzioni  $\vec{X}(t, \sigma)$ , e al variare di  $t$  e  $\sigma$  queste funzioni descrivono la superficie spaziale spazzata dalla stringa nello scorrere del tempo. Una parametrizzazione per  $\sigma$  sensata permetterà di parametrizzare completamente la superficie spaziale e di conseguenza l'intera superficie di universo, permettendo al contempo di semplificare notevolmente l'equazione del moto della stringa relativistica.

Supponiamo di avere una parametrizzazione per  $\sigma \in [0, \sigma_1]$  della stringa all'istante  $t = 0$ . Tracciamo per ogni punto di questa stringa un segmento perpendicolare, che intersechi la stessa stringa al tempo  $t = \epsilon$ , con  $\epsilon$  infinitesimo. Imponendo che ogni punto individuato dall'intersezione tra le perpendicolari e la stringa al tempo  $t = \epsilon$  abbia lo stesso valore di  $\sigma$  del punto di origine della perpendicolare sulla stringa all'istante  $t = 0$ , è possibile parametrizzare la stringa al tempo  $t = \epsilon$ . Ripetendo questo procedimento per parametrizzare la stringa ad istanti di tempo via via successivi, si ricavano delle linee con  $\sigma$  costante che sono perpendicolari alle linee con  $t$  costante e quindi perpendicolari in ogni punto alla stringa.

---

<sup>1</sup>Per maggiori dettagli ed ulteriori esempi di applicazione, si veda [5]

Questo vuol dire che abbiamo scelto una parametrizzazione tale che la velocità della stringa  $\partial\vec{X}/\partial t$  sia uguale alla velocità trasversale  $\vec{v}_\perp$  non solo agli estremi ma in ogni punto della stringa:

$$\frac{\partial\vec{X}}{\partial\sigma} \cdot \frac{\partial\vec{X}}{\partial t} = 0. \quad (5.1)$$

In questo modo le espressioni (4.53) e (4.54) possono essere semplificate in

$$\mathcal{P}_\mu^\tau = \frac{T_0}{c^2} \frac{\frac{ds}{d\sigma}}{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}} \frac{\partial X_\mu}{\partial t}, \quad (5.2)$$

$$\mathcal{P}_\mu^\sigma = -T_0 \sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}} \frac{\partial X_\mu}{\partial s}. \quad (5.3)$$

In particolare ora l'equazione (5.2) vale non solo per gli estremi liberi ma per tutti i punti della stringa.

Fissata una parametrizzazione anche per  $\sigma$ , si può esaminare a questo punto come cambiano le equazioni del moto (4.31). Con  $t = \tau$  si ricava

$$\frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma}. \quad (5.4)$$

Analizziamo separatamente la componente temporale e la componente spaziale. Per  $\mu = 0$  si ha da (5.3)  $\mathcal{P}_0^\sigma = 0$ ; in più l'equazione (5.2) da

$$\mathcal{P}_0^\tau = \frac{T_0}{c} \frac{\frac{ds}{d\sigma}}{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}}. \quad (5.5)$$

La componente temporale dell'equazione del moto diventa quindi

$$\frac{\partial \mathcal{P}_0^\tau}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{T_0}{c} \frac{\frac{ds}{d\sigma}}{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}} \right) = 0. \quad (5.6)$$

Questa equazione equivale a dire che la quantità

$$\frac{T_0 ds}{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}} \quad (5.7)$$

è costante nel tempo. Ma  $T_0 ds$  è l'energia a riposo di un pezzetto infinitesimo di stringa associato a  $d\sigma$ , il cui moto è ben definito ora che sono state fissate le linee con  $\sigma$  costante. L'equazione (5.6) rappresenta quindi l'energia totale del segmento, e (5.5) ci dice che

l'energia totale di ogni pezzetto  $d\sigma$  di stringa si conserva. Per esempio, fissato  $\sigma_0$ , l'energia contenuta nell'intervallo  $[0, \sigma_0]$  rimane costante nel tempo.

Consideriamo ora la componente spaziale dell'equazione del moto della stringa. Inserendo le espressioni

$$\vec{\mathcal{P}}^\tau = \frac{T_0}{c^2} \frac{\frac{ds}{d\sigma}}{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}} \vec{v}_\perp, \quad (5.8)$$

$$\vec{\mathcal{P}}^\sigma = -T_0 \sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}} \frac{\partial \vec{X}}{\partial s}, \quad (5.9)$$

in (5.4) si ricava

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \left[ T_0 \sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}} \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{T_0}{c^2} \frac{\frac{ds}{d\sigma}}{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}} \vec{v}_\perp \right] = \frac{T_0}{c^2} \frac{\frac{ds}{d\sigma}}{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}} \frac{\partial \vec{v}_\perp}{\partial t}. \quad (5.10)$$

È possibile interpretare questa equazione in termini di una stringa non relativistica efficace. Ricordiamo che le equazioni del moto per una stringa non relativistica sono

$$\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{y}}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 \vec{y}}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ T_0 \frac{\partial \vec{y}}{\partial x} \right]. \quad (5.11)$$

Per ottenere un'espressione di questo tipo per (5.10), usiamo il fattore  $ds/d\sigma$  a secondo membro per riscrivere

$$\frac{T_0}{c^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}} \frac{\partial \vec{v}_\perp}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s} \left[ T_0 \sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}} \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right]. \quad (5.12)$$

Per piccole oscillazioni il parametro lunghezza d'arco  $s$  è circa uguale al parametro  $x$  lungo la direzione della stringa statica. Così facendo è possibile confrontare questa equazione con (5.11) e concludere che la stringa relativistica ha una tensione efficace e una densità di massa efficace, entrambi dipendenti dalla velocità, pari a

$$T_{\text{eff}} = T_0 \sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}, \quad \mu_{\text{eff}} = \frac{T_0}{c^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}}. \quad (5.13)$$

## 5.2 Equazione d'onda e vincoli associati

L'equazione del moto (5.11) è ancora troppo complicata. Abbiamo però ancora un grado di libertà che possiamo utilizzare per semplificare i calcoli. Abbiamo scelto un procedimento con cui parametrizzare  $\sigma$  lungo la stringa con lo scorrere del tempo, ma

dobbiamo ancora scegliere una parametrizzazione per la stringa all'istante di tempo iniziale  $t = 0$ .

In particolare, scegliamo di parametrizzare la stringa in modo che ogni segmento con la stessa lunghezza data da  $\sigma$  abbia la stessa quantità di energia.

Per farlo, riscriviamo (5.12) come segue

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial t^2} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}}{\frac{ds}{d\sigma}} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[ \frac{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}}{\frac{ds}{d\sigma}} \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right]. \quad (5.14)$$

Richiediamo che la grandezza indipendente dal tempo  $A(\sigma)$

$$A(\sigma) = \frac{\frac{ds}{d\sigma}}{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}} \quad (5.15)$$

sia pari a 1. Per farlo mantenendo la parametrizzazione di  $\sigma$  tramite l'energia assegniamo ad ogni segmento  $ds$  della stringa l'intervallo  $d\sigma$  dato da

$$d\sigma = \frac{ds}{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}} = \frac{1}{T_0} dE. \quad (5.16)$$

La prima uguaglianza implica che  $A(\sigma) = 1$ , la seconda discende da (5.7), che era stata identificata con l'energia totale dell'intervallo  $ds$ , e permette di realizzare la parametrizzazione che ci si era prefissati. In questo modo infatti la densità di energia  $dE/d\sigma$  è costante lungo la stringa ed è pari alla tensione  $T_0$ .

Integrando l'equazione (5.16) da  $\sigma = 0$  fino ad un generico punto  $Q$ , si può ottenere esplicitamente la parametrizzazione di  $\sigma$ :

$$\sigma(Q) = \frac{E(Q)}{T_0}. \quad (5.17)$$

Come si desiderava, la coordinata  $\sigma(Q)$  assegnata al punto  $Q$  eguaglia l'energia trasportata dalla porzione di stringa che va da  $\sigma = 0$  a  $Q$  diviso per la tensione  $T_0$ . In particolare si ha

$$\sigma \in [0, \sigma_1], \quad \sigma_1 = \frac{E}{T_0}, \quad (5.18)$$

dove  $E$  è l'energia totale della stringa.

Questa scelta per  $\sigma$  è compatibile con la condizione di ortogonalità

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = 0 \quad (5.19)$$

sviluppata nella sezione precedente. Le linee con  $\sigma$  costante assicurano ora che l'energia nella porzione  $[0, \sigma]$  della stringa rimanga costante e queste linee sono perpendicolari alla



stringa. La condizione  $A(\sigma) = 1$  permette di semplificare ulteriormente le equazioni del moto, ottenendo una semplice equazione d'onda:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial \sigma^2}. \quad (5.20)$$

La condizione di parametrizzazione (5.16) equivale in realtà a un vincolo differenziale sulle coordinate spaziali  $\vec{X}$ . Infatti si può riscrivere la prima uguaglianza di (5.16) nella forma

$$\left(\frac{ds}{d\sigma}\right)^2 + \frac{1}{c^2} v_\perp^2 = 1 \rightarrow \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}\right)^2 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right)^2 = 1, \quad (5.21)$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che  $\partial \vec{X} / \partial s$  è un vettore unitario.

Infine, esaminiamo le condizioni al contorno. Da (5.9) si ricava che

$$\vec{\mathcal{P}}^\sigma = -T_0 \sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}} \frac{d\sigma}{ds} \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} = -T_0 \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}. \quad (5.22)$$

Di conseguenza, le condizioni al contorno per estremi liberi è molto semplice

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} = 0, \quad (5.23)$$

ed è possibile osservare che equivalgono alle condizioni al contorno di Neumann.

Le due condizioni di parametrizzazione (5.1) e (5.21) possono essere riassunte in un'unica condizione, nota come condizioni di Virasoro:

$$\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \pm \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right)^2 = 1. \quad (5.24)$$

Riassumendo, le equazioni che bisogna risolvere contemporaneamente per determinare il moto di una stringa relativistica con estremi liberi sono:

$$\text{Equazione d'onda:} \quad \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial \sigma^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial t^2} = 0, \quad (5.25)$$

$$\text{Condizioni di Virasoro:} \quad \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \pm \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right)^2 = 1, \quad (5.26)$$

$$\text{Condizioni al contorno:} \quad \left.\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}\right|_{\sigma=0} = \left.\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}\right|_{\sigma=\sigma_1} = 0. \quad (5.27)$$

Infine da (5.2) e (5.3) si ricava

$$\mathcal{P}_\mu^\tau = \frac{T_0}{c^2} \frac{\partial X_\mu}{\partial t}, \quad (5.28)$$

$$\mathcal{P}_\mu^\sigma = -T_0 \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma}. \quad (5.29)$$

### 5.3 Soluzione dell'equazione del moto

Risolviamo ora il sistema di equazioni (5.25)-(5.27). Partiamo dall'equazione d'onda, la cui soluzione più generale è

$$\vec{X}(t, \sigma) = \frac{1}{2}(\vec{F}(ct + \sigma) + \vec{G}(ct - \sigma)). \quad (5.30)$$

La condizione al contorno per  $\sigma = 0$  porta all'equazione

$$\vec{F}'(ct) - \vec{G}'(ct) = 0, \quad (5.31)$$

valida per tutti i valori di  $ct$ .

Posto  $u$  l'argomento delle funzioni, da (5.31) si ricava che

$$\vec{G}(u) = \vec{F}(u) + \vec{a}_0, \quad (5.32)$$

dove  $\vec{a}_0$  è un vettore costante che può essere assorbito dentro la definizione di  $\vec{F}(u)$ .

La soluzione diventa quindi

$$\vec{X}(t, \sigma) = \frac{1}{2}(\vec{F}(ct + \sigma) - \vec{F}(ct - \sigma)). \quad (5.33)$$

La seconda condizione al contorno per  $\sigma = \sigma_1$  porta all'equazione

$$\vec{F}'(ct + \sigma_1) - \vec{F}'(ct - \sigma_1) = 0, \quad (5.34)$$

che a sua volta, posto  $u = ct - \sigma_1$ , diventa

$$\frac{d\vec{F}}{du}(u + 2\sigma_1) = \frac{d\vec{F}}{du}(u). \quad (5.35)$$

La funzione  $\vec{F}(u)$  deve perciò avere la derivata periodica di periodo  $2\sigma_1$ ; in altre parole  $\vec{F}$  è una funzione quasi-periodica, dopo un periodo di  $2\sigma_1$  cambia di una costante fissa:

$$\vec{F}(u + 2\sigma_1) = \vec{F}(u) + 2\sigma_1 \frac{\vec{v}_0}{c}, \quad (5.36)$$

dove  $\vec{v}_0$  è una costante con le dimensioni di una velocità.

Consideriamo infine la condizione di Virasoro. Se ne deduce, dopo una serie di calcoli algebrici, che

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \pm \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = \pm \vec{F}'(ct \pm \sigma). \quad (5.37)$$

Questo vuol dire che il vettore  $\vec{F}'(u)$  è un vettore unitario:

$$\left| \frac{d\vec{F}(u)}{du} \right|^2 = 1. \quad (5.38)$$

Il sistema iniziale si è quindi ridotto a calcolare

$$\vec{X}(t, \sigma) = \frac{1}{2} \left( \vec{F}(ct + \sigma) - \vec{F}(ct - \sigma) \right), \quad \sigma \in [0, \sigma_1], \quad (5.39)$$

con  $\vec{F}(u)$  tale che

$$\left| \frac{d\vec{F}(u)}{du} \right|^2 = 1, \quad \vec{F}(u + 2\sigma_1) = \vec{F}(u) + 2\sigma_1 \frac{\vec{v}_0}{c}. \quad (5.40)$$

Dall'equazione (5.39) è possibile osservare che il moto dell'estremo  $\sigma = 0$  della stringa aperta è dato da

$$\vec{X}(t, 0) = \vec{F}(ct). \quad (5.41)$$

Quindi la funzione  $\vec{F}(u)$  ha un preciso significato fisico: rappresenta il moto dell'estremo  $\sigma = 0$  al tempo  $u/c$ . Osservando quindi questo estremo è possibile ricostruire l'intera  $\vec{F}(u)$  e di conseguenza la funzione  $\vec{X}(t, \sigma)$ .

Inoltre, poiché il moto è determinato se si conosce  $\vec{F}(u)$  da  $u = 0$  a  $u = 2\sigma_1$ , l'osservazione dell'estremo dovrà durare un tempo  $\delta t = 2\sigma_1/c = 2E/cT_0$ , il doppio del tempo che la luce impiega per percorrere la lunghezza di una stringa a riposo di energia  $E$ .

È possibile dare un'interpretazione fisica anche alla velocità costante  $\vec{v}_0$ . Dalla seconda della (5.40) si ha

$$\vec{F}(2\sigma_1) = \vec{F}(0) + 2\sigma_1 \frac{\vec{v}_0}{c}, \quad (5.42)$$

ed espressa  $\vec{F}$  in funzione dell'estremo  $\sigma = 0$  si ricava l'equazione

$$\vec{X}(t = \frac{2\sigma_1}{c}, 0) = \vec{X}(t = 0, 0) + \frac{2\sigma_1}{c} \vec{v}_0. \quad (5.43)$$

Questo mostra che  $\vec{v}_0$  è la velocità media dell'estremo  $\sigma = 0$  durante l'intervallo di tempo  $[0, 2\sigma_1/c]$ .

# Capitolo 6

## Correnti lungo la superficie di universo

Conviene spesso in fisica analizzare le proprietà di simmetria e invarianza del sistema in esame, perché sono direttamente collegati, tramite il teorema di Nöether, a grandezze fisiche conservate. Utilizzando la trattazione lagrangiana sviluppata nel capitolo 1, è possibile individuare sulla superficie di universo tracciata dalla stringa nello spazio-tempo delle correnti conservate. In particolare daremo un significato fisico a  $\mathcal{P}_\mu^\tau$  e  $\mathcal{P}_\mu^\sigma$ .

### 6.1 Correnti conservate e loro interpretazione

L'azione di Nambu-Goto può essere espressa in funzione della densità di lagrangiana.

$$S = \int d\xi^0 d\xi^1 \mathcal{L}(\partial_0 X^\mu, \partial_1 X^\mu), \quad (6.1)$$

con  $(\xi^0, \xi^1) = (\tau, \sigma)$  e  $\partial_\alpha = \partial/\partial\xi^\alpha$ . Poiché la densità di lagrangiana dipende solo dalle derivate delle coordinate, sarà sicuramente invariante per traslazioni spazio-temporali della forma

$$\delta X^\mu(\tau, \sigma) = \epsilon^\mu, \quad (6.2)$$

dove  $\epsilon^\mu$  è una costante.

Riprendendo ora le considerazioni fatte nella sezione 1.2, è possibile osservare che ora  $\alpha$  indica le coordinate della superficie di universo  $\tau$  e  $\sigma$ ; i campi  $\phi^a$  non sono nient'altro che le coordinate  $X^\mu$  della stringa; infine l'indice  $a$  e l'indice  $i$  sono stati sostituiti da  $\mu$ , che indicizza le diverse correnti. Con queste nuove convenzioni, utilizzando (1.29) con  $i$  e  $a$  che assumono tutti i valori di  $\mu$ , le correnti che si conservano sono:

$$\epsilon^\mu j_\mu^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha X^\mu)} \delta X^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha X^\mu)} \epsilon^\mu. \quad (6.3)$$

Semplificando gli  $\epsilon^\mu$  si ricava

$$j_\mu^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha X^\mu)} \rightarrow (j_\mu^0, j_\mu^1) = \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^{\mu'}} \right). \quad (6.4)$$

Ma le derivate della lagrangiana nella seconda equazione sono già state definite. Si trova infatti che

$$j_\mu^\alpha = \mathcal{P}_\mu^\alpha \rightarrow (j_\mu^0, j_\mu^1) = (\mathcal{P}_\mu^\tau, \mathcal{P}_\mu^\sigma). \quad (6.5)$$

Il risultato è estremamente interessante:  $\tau$  e  $\sigma$  in  $\mathcal{P}_\mu$  indicano le due diverse componenti di una corrente sulla superficie di universo descritta dalla stringa.

L'equazione di conservazione di tale corrente è

$$\partial_\alpha \mathcal{P}_\mu^\alpha = \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} = 0, \quad (6.6)$$

che è esattamente l'equazione del moto della stringa relativistica.

Le cariche, anch'esse conservate, legate a queste correnti sono

$$p_\mu(\tau) = \int_0^{\sigma_1} \mathcal{P}_\mu^\tau(\tau, \sigma) d\sigma. \quad (6.7)$$

In particolare  $p_\mu$  rappresenta il momento trasportato dalla stringa, nascendo da un'invarianza per traslazione spazio-temporale; essendo stato ricavato integrando  $\mathcal{P}_\mu^\tau$  lungo la stringa parametrizzata da  $\sigma$ , se ne deduce che  $\mathcal{P}_\mu^\alpha$  è la densità di quantità di moto spazio-temporale rispetto a  $\sigma$  trasportata dalla stringa.

La legge di conservazione del momento

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = 0 \quad (6.8)$$

deve valere per ogni possibile scelta di  $\tau$ , quindi anche per il gauge statico, a causa dell'invarianza per riparametrizzazione. Questo vuol dire che l'integrale in (6.7) deve restituire lo stesso valore indipendentemente dalla parametrizzazione scelta per la superficie di universo, e per qualsiasi curva scelta su questa superficie.

Si consideri un segmento infinitesimo  $(d\tau, d\sigma)$  lungo una linea chiusa orientata  $\Gamma$  che racchiude una regione semplicemente connessa  $\mathcal{R}$  della superficie di universo (vedi fig. 6.1). La normale uscente dal segmento sarà  $(d\sigma, -d\tau)$ , e il flusso infinitesimo di corrente attraverso il segmento è

$$\text{Flusso infinitesimale} = (\mathcal{P}_\mu^\tau, \mathcal{P}_\mu^\sigma) \cdot (d\sigma, -d\tau) = \mathcal{P}_\mu^\tau d\sigma - \mathcal{P}_\mu^\sigma d\tau. \quad (6.9)$$

Il momento calcolato in (6.7) equivale al flusso della corrente lungo le linee con  $\tau$  costante. Il flusso totale attraverso  $\Gamma$  è

$$p_\mu(\Gamma) = \oint_\Gamma (\mathcal{P}_\mu^\tau d\sigma - \mathcal{P}_\mu^\sigma d\tau) = \int_{\mathcal{R}} \left( \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} \right) d\tau d\sigma = 0, \quad (6.10)$$

come ci si aspetta, visto che è improbabile che un dominio della superficie di universo sia una sorgente o un pozzo di momento.

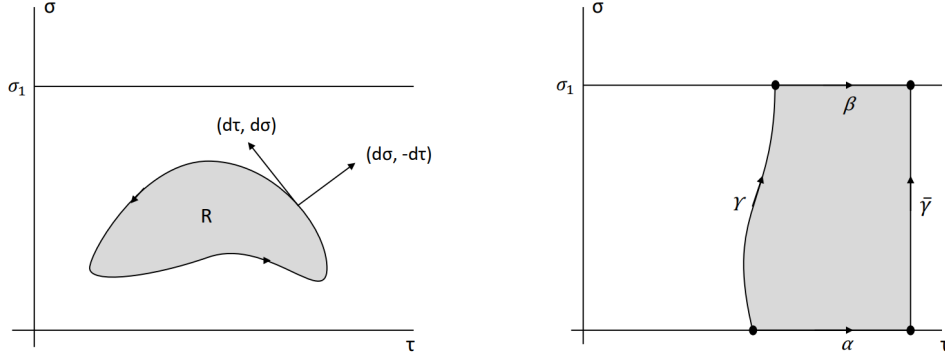


Figura 6.1: A sinistra: il flusso totale di momento attraverso una regione semplicemente connessa  $\mathcal{R}$  della superficie di universo è pari a zero. A destra: una regione semplicemente connessa il cui contorno include una generica curva  $\gamma$  e una stringa  $\bar{\gamma}$ .

Generalizziamo ora (6.7) dimostrando che per qualsiasi curva  $\gamma$  che inizia e finisce ai due estremi di una stringa aperta, la quantità di moto trasportata dalla stringa vale

$$p_\mu(\gamma) = \int_\gamma (\mathcal{P}_\mu^\tau d\sigma - \mathcal{P}_\mu^\sigma d\tau). \quad (6.11)$$

Presa la curva  $\gamma$ , siano  $\bar{\gamma}$  una curva con  $\tau$  costante e  $\alpha$  e  $\beta$  due curve lungo il contorno della superficie di universo tali da ottenere complessivamente una linea chiusa  $\Gamma$  orientata in senso antiorario e data da

$$\Gamma = \bar{\gamma} - \beta - \gamma + \alpha. \quad (6.12)$$

Per quanto detto precedentemente, il flusso  $p_\mu(\Gamma)$  si azzera:

$$p_\mu(\Gamma) = \int_\Gamma (\mathcal{P}_\mu^\tau d\sigma - \mathcal{P}_\mu^\sigma d\tau) = \left( \int_{\bar{\gamma}} - \int_\gamma + \int_\alpha - \int_\beta \right) (\mathcal{P}_\mu^\tau d\sigma - \mathcal{P}_\mu^\sigma d\tau) = 0. \quad (6.13)$$

Ma lungo  $\alpha$  e  $\beta$   $d\sigma$  è zero, e allo stesso modo, per stringhe con estremi liberi, anche  $\mathcal{P}_\mu^\sigma$  si annulla. Rimangono solo gli integrali su  $\bar{\gamma}$  e  $\gamma$ , dai quali si ricava

$$\int_\gamma (\mathcal{P}_\mu^\tau d\sigma - \mathcal{P}_\mu^\sigma d\tau) = \int_{\bar{\gamma}} (\mathcal{P}_\mu^\tau d\sigma - \mathcal{P}_\mu^\sigma d\tau) = \int_{\bar{\gamma}} \mathcal{P}_\mu^\tau d\sigma = p_\mu, \quad (6.14)$$

poiché  $d\tau = 0$  su  $\bar{\gamma}$ . In conclusione

$$p_\mu = \int_\gamma (\mathcal{P}_\mu^\tau d\sigma - \mathcal{P}_\mu^\sigma d\tau). \quad (6.15)$$

Grazie a questo risultato, un osservatore che misuri il momento di una stringa in due istanti di tempo diversi, in corrispondenza dei quali la stringa sarà descritta da curve diverse con parametrizzazione possibilmente diverse, troverà che entrambi i valori coincidono. Il momento sarà così conservato nel tempo.

In particolare è possibile trovare, utilizzando il gauge statico, le seguenti espressioni

$$p^0 \equiv \frac{E}{c} = \frac{1}{c} \int_{\gamma} \frac{T_0 ds}{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}}, \quad \vec{p} = \int_{\gamma} \frac{T_0 ds}{c^2} \frac{\vec{v}_{\perp}}{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}}. \quad (6.16)$$

L'equazione sopra per l'energia della stringa coincide con il risultato ottenuto in (5.7).

## 6.2 Simmetrie di Lorentz e correnti associate

Per costruzione, l'azione della stringa relativistica è Lorentz invariante. Questo vuol dire che le trasformazioni di Lorentz delle coordinate  $X^{\mu}$  lasciano invariata l'azione. A questa simmetria corrisponde la presenza di correnti conservate che ci proponiamo di determinare.

Per prima cosa, definiamo una trasformazione di Lorentz infinitesima una trasformazione della forma  $X^{\mu} \rightarrow X^{\mu} + \delta X^{\mu}$ , dove

$$\delta X^{\mu} = \epsilon^{\mu\nu} X_{\nu}, \quad (6.17)$$

che non cambia la forma quadratica  $\eta_{\mu\nu} X^{\mu} X^{\nu}$ . Quest'ultima condizione impone che la matrice di costanti infinitesime  $\epsilon^{\mu\nu}$  sia completamente antisimmetrica.

L'invarianza della densità di lagrangiana per trasformazioni di Lorentz può essere verificata facilmente. Poiché ogni suo termine è della forma

$$\eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^{\mu}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial X^{\nu}}{\partial \xi^{\beta}}, \quad (6.18)$$

con  $\xi^{\alpha}$  e  $\xi^{\beta}$  che sono indifferentemente  $\tau$  o  $\sigma$ , basta verificare che

$$\begin{aligned} \delta \left( \eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^{\mu}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial X^{\nu}}{\partial \xi^{\beta}} \right) &= \eta_{\mu\nu} \left( \frac{\partial \delta X^{\mu}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial X^{\nu}}{\partial \xi^{\beta}} + \frac{\partial X^{\mu}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial \delta X^{\nu}}{\partial \xi^{\beta}} \right) \\ &= \eta_{\mu\nu} \left( \epsilon^{\mu\rho} \frac{\partial X_{\rho}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial X^{\nu}}{\partial \xi^{\beta}} + \epsilon^{\nu\rho} \frac{\partial X^{\mu}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial X_{\rho}}{\partial \xi^{\beta}} \right) \\ &= \epsilon_{\nu\rho} \frac{\partial X^{\rho}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial X^{\nu}}{\partial \xi^{\beta}} + \epsilon_{\mu\rho} \frac{\partial X^{\mu}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial X^{\rho}}{\partial \xi^{\beta}}, \end{aligned} \quad (6.19)$$

sia zero. Ponendo  $\mu \rightarrow \rho$  e  $\rho \rightarrow \nu$  nel secondo termine si ottiene

$$\delta \left( \eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^{\mu}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial X^{\nu}}{\partial \xi^{\beta}} \right) = (\epsilon_{\nu\rho} + \epsilon_{\rho\nu}) \frac{\partial X^{\rho}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial X^{\nu}}{\partial \xi^{\beta}} = 0, \quad (6.20)$$

come si voleva dimostrare.

Utilizzando (1.29), le correnti associate con questa simmetria sono

$$\epsilon^{\mu\nu} j_{\mu\nu}^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha X^\mu)} \delta X^\mu = \mathcal{P}_\mu^\alpha \epsilon^{\mu\nu} X_\nu. \quad (6.21)$$

Poiché  $\epsilon^{\mu\nu}$  è completamente antisimmetrico, anche le correnti conservate  $j_\mu^\alpha$  sono antisimmetriche, e l'equazione (6.21) può essere riscritta come

$$\epsilon^{\mu\nu} j_{\mu\nu}^\alpha = \left(-\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu}\right)(X_\mu \mathcal{P}_\nu^\alpha - X_\nu \mathcal{P}_\mu^\alpha). \quad (6.22)$$

Definiamo quindi le correnti  $\mathcal{M}_{\mu\nu}^\alpha$  direttamente dall'equazione sopra:

$$\mathcal{M}_{\mu\nu}^\alpha = X_\mu \mathcal{P}_\nu^\alpha - X_\nu \mathcal{P}_\mu^\alpha. \quad (6.23)$$

Per costruzione  $\mathcal{M}_{\mu\nu}^\alpha$  sono antisimmetriche, e l'equazione di conservazione è

$$\frac{\partial \mathcal{M}_{\mu\nu}^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{M}_{\mu\nu}^\sigma}{\partial \sigma} = 0. \quad (6.24)$$

Le cariche, in analogia con (6.15), sono

$$M_{\mu\nu} = \int_\gamma (\mathcal{M}_{\mu\nu}^\tau d\sigma - \mathcal{M}_{\mu\nu}^\sigma d\tau), \quad (6.25)$$

e sono anch'esse antisimmetriche.

Di conseguenza in uno spazio-tempo a quattro dimensioni ci sono sei cariche conservate. Posti  $i$  e  $j$  ad indicare indici spaziali,  $M_{0i}$  sono le tre cariche associate ai tre boost lungo gli assi coordinati, mentre  $M_{ij}$  sono le tre cariche legate alle tre rotazioni fondamentali. Poiché  $\vec{\mathcal{P}}^\tau$  rappresenta la densità di quantità di moto, si ha che  $M_{ij}$  è precisamente la densità di momento angolare: le sue componenti misurano il momento angolare  $\vec{L}$  della stringa tramite la relazione  $\vec{L}_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} M_{jk}$ .

Le cariche associate ai boost sono nello specifico

$$M^{0i} = \int d\sigma (ct \mathcal{P}^{\tau i} - X^i \mathcal{P}^{\tau 0}) = ctp^i - \int d\sigma X^i \mathcal{P}^{\tau 0}. \quad (6.26)$$

Moltiplicando entrambi i membri per  $c/E$ , dove  $E$  è l'energia conservata della stringa, si ha

$$\frac{cM^{0i}}{E} = t \frac{c^2 p^i}{E} - \frac{1}{E} \int d\sigma X^i c \mathcal{P}^{\tau 0}. \quad (6.27)$$

Poiché  $c \mathcal{P}^{\tau 0}$  è la densità di energia lungo la stringa, l'ultimo termine a destra può essere identificato con la posizione dipendente dal tempo del centro di massa (energia)  $X_{\text{cm}}^i(t)$  della stringa. Si ottiene quindi

$$X_{\text{cm}}^i(t) = -\frac{cM^{0i}}{E} + t \frac{c^2 p^i}{E}. \quad (6.28)$$



L'equazione (6.28) descrive il moto del centro di massa della stringa, dove  $c^2 p^i/E$  è la velocità del centro di massa e le cariche conservate  $M^{0i}$  insieme ad  $E$  determinano la sua posizione al tempo  $t = 0$ .

# Appendice A: Calcolo della variazione dell'azione $\delta S$

Dato un sistema fisico di cui si conosce l'azione  $S$ , è possibile ricavarne le equazioni del moto considerando una variazione delle coordinate  $\delta \vec{q}$  tale che al tempo iniziale  $t_i$  e al tempo finale  $t_f$  si abbia

$$\delta \vec{q}(t_i) = \delta \vec{q}(t_f) = 0. \quad (6.29)$$

La variazione dell'azione a seguito di questo cambiamento della traiettoria del sistema nello spazio delle fasi, se posta a zero, determina univocamente, in virtù del principio di Hamilton, le equazioni del moto permesso al sistema. Come esempio si consideri un punto materiale di massa  $m$  che si muove lungo l'asse  $x$  sotto l'azione di un potenziale  $V(x)$ . La sua azione è

$$S(x) = \int_{t_i}^{t_f} \left\{ \frac{1}{2} m (\dot{x}(t))^2 - V(x(t)) \right\} dt. \quad (6.30)$$

L'azione per la traiettoria perturbata  $x(t) + \delta x(t)$  sarà invece

$$\begin{aligned} S(x + \delta x) &= \int_{t_i}^{t_f} \left\{ \frac{m}{2} \left( \frac{d}{dt} (x(t) + \delta x(t)) \right)^2 - V(x(t) + \delta x(t)) \right\} dt \\ &= S(x) + \int_{t_i}^{t_f} \left\{ m \dot{x}(t) \frac{d}{dt} \delta x(t) - V'(x(t)) \delta x(t) \right\} dt + \mathcal{O}((\delta x)^2), \end{aligned} \quad (6.31)$$

dove abbiamo espanso in serie di Taylor  $V$  intorno a  $x(t)$  fino al primo ordine. La variazione che cercavamo è quindi

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} \left\{ m \dot{x}(t) \frac{d}{dt} \delta x(t) - V'(x(t)) \delta x(t) \right\} dt. \quad (6.32)$$

Per trovare le equazioni del moto non devono essere presenti derivate che agiscono su  $\delta x$ . Integrando per parti quindi si ricava

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_i}^{t_f} \left\{ \frac{d}{dt} (m\dot{x}(t)\delta x(t)) - m\ddot{x}(t)\delta x - V'(x(t))\delta x(t) \right\} dt \\ &= m\dot{x}(t_f)\delta x(t_f) - m\dot{x}(t_i)\delta x(t_i) + \int_{t_i}^{t_f} \delta x(t)(-m\ddot{x}(t) - V'(x(t)))dt.\end{aligned}\tag{6.33}$$

Utilizzando (7.1), la variazione si riduce a

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} \delta x(t)(-m\ddot{x}(t) - V'(x(t)))dt,\tag{6.34}$$

da cui si ricava, imponendo l'integrando pari a zero, l'equazione del moto

$$m\ddot{x}(t) = -V'(x(t)),\tag{6.35}$$

che è la seconda legge di Newton.

In alternativa, la variazione può essere calcolata più agilmente come segue:

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} \left( \frac{\partial L}{\partial x} \delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} \right),\tag{6.36}$$

e poiché

$$\delta \dot{x} = \frac{d}{dt}(\delta x),\tag{6.37}$$

si ricava infine

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} \left( \frac{\partial L}{\partial x} \delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{d}{dt} \delta x \right),\tag{6.38}$$

del tutto equivalente a (7.4).

Per determinare le equazioni del moto si procede a questo punto come prima.

## Appendice B: Conservazione della carica per lagrangiane invarianti

La dimostrazione della conservazione della carica  $Q$  definita come

$$\epsilon Q \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \quad (6.39)$$

per lagrangiane invarianti per trasformazioni del tipo

$$q(t) \rightarrow q(t) + \delta q(t) \quad \dot{q}(t) \rightarrow \dot{q}(t) + \frac{d(\delta q(t))}{dt} \quad (6.40)$$

viene svolta considerando le equazioni del moto di Eulero-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \quad (6.41)$$

Poiché la lagrangiana non cambia se vengono applicate le variazioni (8.1), si ha che

$$\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt}(\delta q) = 0. \quad (6.42)$$

Utilizzando (8.2) per eliminare  $\frac{\partial L}{\partial q}$ , si ottiene

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt}(\delta q) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) = 0, \quad (6.43)$$

che prova che per  $Q$  vale la legge di conservazione

$$\frac{dQ}{dt} = 0. \quad (6.44)$$

## Appendice C: Verifica della corretta formulazione dell'area propria $A$

### **Teorema.**

*Per ogni punto  $P$  della superficie di universo in cui ci sono sia un vettore tangente di tipo tempo che un vettore tangente di tipo spazio, il radicando in (4.19) è positivo:*

$$\left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial X}{\partial \tau}\right)^2 \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 > 0, \quad (6.45)$$

*e l'area propria  $A$  è quindi ben definita.*

*Dimostrazione.* Si consideri il set di vettori tangenti  $v^\mu(\lambda)$  nel punto  $P$  dato da

$$v^\mu(\lambda) = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} + \lambda \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}, \quad (6.46)$$

dove  $\lambda \in (-\infty, \infty)$  è un parametro. Poiché  $\partial X^\mu/\partial \tau$  e  $\partial X^\mu/\partial \sigma$  sono due vettori linearmente indipendenti, variando  $\lambda$  è possibile ottenere tutti i vettori tangenti a  $P$ , compreso  $\partial X^\mu/\partial \sigma$ , che si ottiene per  $\lambda \rightarrow \infty$ . Per determinare se  $v^\mu(\lambda)$  è un vettore tipo tempo o tipo spazio, calcoliamo il suo modulo quadro:

$$v^2(\lambda) = v^\mu(\lambda)v_\mu(\lambda) = \lambda^2 \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 + 2\lambda \left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma}\right) + \left(\frac{\partial X}{\partial \tau}\right)^2. \quad (6.47)$$

Questo è un polinomio di secondo grado in  $\lambda$ , e per avere sia un vettore tipo tempo che un vettore tipo spazio in  $P$  è necessario che  $v^2(\lambda)$  assuma valori sia positivi che negativi. Questo vuol dire che l'equazione  $v^2(\lambda) = 0$  deve avere due radici reali, e di conseguenza il discriminante dell'equazione  $v^2(\lambda)$  deve essere positivo. Da (9.3) è possibile vedere che questo implica che

$$\left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial X}{\partial \tau}\right)^2 \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 > 0, \quad (6.48)$$

che è ciò che volevamo provare.  $\square$



# Bibliografia

- [1] Christodoulides, C. *The Special Theory of Relativity*, Springer, 2016
- [2] Landau, L. D. e Lifshitz, E. M. *Teoria dei campi*, Editori riuniti, 2010.
- [3] Landau, L. D. e Lifshitz, E. M. *Meccanica*, Editori riuniti, 2010.
- [4] Schutz, B. *Geometrical methods of mathematical physics*, Cambridge University Press, 1980.
- [5] Zwiebach, B. *A first course in string theory*, Cambridge University Press, 2009.